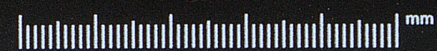
colorchecker CLASSIC







x·rite



Cours de M. Tannery
École Normale 1e année (Sciences)
1890-1891.
2e cahier.



Table

Fonctions de variables imaginaires admettant des dérivées.

Les règles établies pour les dérivées de sommes, de produits, de quotients de fonctions de variables réelles subsistent, ainsi que leurs démonstrations, pour les fonctions de variables imaginaires. Par exemple, soient u, v 2 fonctions de l'imaginaire z; le produit uv a pour dérivée: $uv' + vu'$.

Sa dérivée logarithmique a pour expression: $\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$,

et ainsi de suite.

Le théorème des fonctions de fonctions subsiste ainsi que sa démonstration. Si $f(u)$ admet une dérivée, et si u est une fonction de z, $\varphi(z)$ admettant une dérivée, $f(u)$ admet une dérivée par rapport à z, qui est:

$$f'(u)\,\varphi'(z)$$

Il faut d'ailleurs avoir soin dans toutes les définitions, de tenir compte des conditions que traduisent les 2 équations aux dérivées partielles du 1er ordre: $\varphi'_x = \psi'_y$ $\varphi'_y = -\psi'_x$.

Le théorème des fonctions composées ne s'applique plus ici, car il repose sur le théorème des accroissements finis. Il subsiste toutefois, si l'on admet l'existence et la continuité des dérivées partielles du 2e ordre.

Règle de dérivation des fonctions inverses.

Soit une relation: $\varphi(z) = x$,

z et x étant des variables imaginaires. Supposons que $\varphi(z)$ soit déterminée et admette des dérivées pour toutes les valeurs de z situées à l'intérieur d'un contour simple B. Supposons de plus que cette relation permette de définir une fonction continue

$$z = f(x)$$

pour toutes les valeurs de x situées dans une certaine aire A, et que toutes les valeurs correspondantes de z soient situées dans l'aire B. _ Dans ces conditions, la fonction $f(x) = z$. admet une dérivée, qui est : $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(z)}$

Soit en effet ξ l'accroissement de la variable imaginaire x, il donne lieu à l'accroissement ζ de z, c.à.d. que :

$f(x+\xi) = z + \zeta$ D'autre part : $\varphi(z+\zeta) = x + \xi$

$$\frac{\varphi(z+\zeta) - \varphi(z)}{\zeta} = \frac{\xi}{\zeta}.$$

Or si ξ tend vers 0 par une loi quelconque, ζ devra tendre vers 0, en vertu de la continuité, et par suite

$\dfrac{\varphi(z-\zeta) - \varphi(z)}{\zeta}$ doit tendre vers $\varphi'(z)$.

Donc $\dfrac{\xi}{\zeta}$ tend aussi vers $\varphi'(z)$, et $\dfrac{\zeta}{\xi}$ vers $\dfrac{1}{\varphi'(z)}$, ce qui montre que la fonction $z = f(x)$ admet pour dérivée

$$\frac{1}{\varphi'(z)}.$$

<u>Remarques</u>. Restons dans le champ des variables réelles. On peut considérer une fonction imaginaire d'une variable réelle x,

c.à.d. l'ensemble de 2 fonctions réelles de cette variable:

$$\varphi(x) + i\psi(x)$$

On pourra se proposer de déterminer la dérivée d'une pareille fonction comme limite du rapport des accroissements de la fonction et de la variable; on trouvera: $\varphi'(x) + i\psi'(x)$.

De même pour les dérivées suivantes. On verrait aisément que les règles relatives aux dérivées de la somme, du produit, du quotient subsistent pour les fonctions imaginaires de variables réelles.

Cela posé, si on considère une fonction d'une variable imaginaire:

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$$

et qu'on admette que x et y sont fonctions d'une var. réelle t:

$$z = \varphi(t) + i\psi(t)$$

$f(z)$ deviendra une fonction imaginaire de la variable réelle t. La dérivée par rapport à t, sera, en vertu du théorème des fonctions de fonctions, $f'(z)\left[\varphi'(t) + i\psi'(t)\right]$

Cette remarque faite, revenons à une fonction imaginaire d'une variable réelle x: $\varphi(x) + i\psi(x)$

Si les fonctions réelles φ, ψ sont continues et admettent des dérivées jusqu'au n^e ordre, on pourra écrire:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) \dots\dots + \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}\varphi^{n-1}(x) + \frac{h^n}{n!}\varphi^n(x+\theta h)$$

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \frac{h}{1}\psi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\psi''(x) \dots\dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{n-1}(x) + \frac{h^n}{n!}\psi^n(x+\theta' h)$$

θ et θ' étant des nombres positifs compris entre 0 et 1.

Ajoutons ces 2 égalités membre à membre, en multi. la 2e par i :

$$\varphi(x+h) + i\psi(x+h) = \varphi(x) + i\psi(x) + \frac{h}{1}\left[\varphi'(x) + i\psi'(x)\right] + \frac{h^2}{1.2}\left[\varphi''(x) + i\psi''(x)\right]$$

$$\cdots\cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\left[\varphi^{n-1}(x) + i\psi^{n-1}(x)\right] + \frac{h^n}{n!}\left[\varphi^n(x+\theta h) + i\psi^n(x+\theta' h)\right]$$

c'est à dire ;

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \frac{h^n}{n!} R$$

Formule analogue à celle de Taylor, sauf pour la forme de R :

$$R = \varphi^n(x+\theta h) + i\psi^n(x+\theta' h)$$

Considérons le module de $f^n(x)$: $\sqrt{\varphi^n(x)^2 + \psi^n(x)^2}$

Soit K la limite supérieure de ce module quand x varie de x à $(x+h)$. On aura :

$$\varphi^n(x+\theta h)^2 < K^2 \quad \text{et} \quad \psi^n(x+\theta' h)^2 < K^2$$

donc on aura pour le module de $\varphi^n(x+\theta h) + i\psi^n(x+\theta' h)$:

$$\sqrt{\varphi^n(x+\theta h)^2 + \psi^n(x+\theta' h)^2} < K\sqrt{2}.$$

On pourra donc remplacer R par λK, λ étant une imaginaire telle que $0 < |\lambda| < \sqrt{2}$.

Si les dérivées sont continues, il y aura une valeur de x comprise entre x et $(x+h)$ pour laquelle le module $\sqrt{\varphi^n(x+\theta h)^2 + \psi^n(x+\theta' h)^2}$ sera maximum ; soit $(x+\theta_1 h)$ cette valeur. K sera le module d'une expression telle que $f^n(x+\theta_1 h)$

En modifiant la valeur de λ sans que son module dépasse $\sqrt{2}$, on

peut mettre le terme complémentaire R sous la forme

$$\lambda f^n (x+\theta_1 h)$$

M. Darboux a montré qu'on pouvait même supposer

$$|\lambda| < 1.$$

(Journal de Liouville, tome II, 3e série.)

Nous pouvons le démontrer d'une manière très-simple.

Soit $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ une fonction imaginaire de la variable réelle t; si l'on suppose que les fonctions réelles φ, ψ sont continues et admettent des dérivées jusqu'à l'ordre p dans l'intervalle $t_1 t_2$, et si l'on pose $f'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t)$, etc. on pourra écrire :

$$f(t+h) = f(t) + \frac{h}{1} f'(t) + \frac{h^2}{1.2} f''(t) + \dots\dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(t)$$

$$+ \frac{h^n}{n!}\left(\varphi^n(t+\theta h) + i\psi^n(t+\theta' h)\right)$$

le terme complémentaire pouvant aussi s'écrire :

$$\lambda \frac{h^n}{n!} f^n(t+\theta_1 h) \qquad 0 < |\lambda| < \sqrt{2}$$

en supposant t et $t+h$ pris dans l'intervalle $t_1 - t_2$, et $n < p$.

Si l'on fait $n = 1$, l'égalité devient :

$$f(t+h) - f(t) = \lambda h f'(t+\theta_1 h)$$

formule analogue à celle des accroissements finis d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Représentons géométriquement $f(t)$ par le p. M, $f(t+h)$ par M'.

le module $|f(t+h)-f(t)|$ est représenté par le segment MM'.
Si t représente le temps, $\frac{MM'}{h}$ sera la vitesse moyenne d'un mobile qui parcourrait ce segment dans le temps h.

M' $t+h$ $|f(t+h)-f(t)|$ M t

D'autre part, la vitesse vraie du mobile dont le mouvement a pour éq : $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$
a pour expression : $\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}$
Or il est absurde de supposer que dans l'intervalle de t à $(t+h)$ la vitesse moyenne ne soit jamais plus petite que la vitesse vraie, alors que le chemin sur la droite est plus court que sur la trajectoire.
Donc : $\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| < \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}$
et pour une valeur de t comprise entre t et $(t+h)$:

$$\sqrt{\varphi'(t+\theta h)^2+\psi'(t+\theta h)^2} = |f'(t+\theta h)| \qquad 0<\theta<1.$$

on doit donc avoir : $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lambda\sqrt{\varphi'(t+\theta h)^2+\psi'(t+\theta h)^2}$

λ étant une quantité imaginaire telle que $0<|\lambda|<1$.
Cette égalité joue le même rôle dans la théorie des fonctions imaginaires que la formule des accroissements finis pour les fonctions réelles.
— Revenons à la formule générale du développement de $f(t+h)$: si l'on y fait $t=0$, et $h=t$, on a la formule analogue de celle de Maclaurin :

$$f(t)=f(0)+\frac{t}{1}f'(0)+\frac{t^2}{1.2}f''(0)+\dots\dots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{t^n}{n!}\lambda f^n(\theta t)$$

$$0<\theta<1.$$

Soit $F(z)$ une fonction d'une variable imaginaire définie pour tous les points d'une aire A. Supposons que $F(z)$ admette, pour ces points, des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n. Considérons 2 points, z_0 et $(z_0+\zeta)$ situés à l'intérieur de A et tels que la droite qui les joint soit aussi à l'intérieur de A. L'affixe d'un point quelconque de cette droite sera de la forme:

$$z_0 + t\zeta \qquad 0 < t < 1.$$

Posons: $z_0 = x_0 + iy_0$ $\qquad \zeta = h + ik$

on a: $z_0 + t\zeta = x_0 + th + i(y_0 + tk)$

Le point $(x_0+th,\ y_0+tk)$ décrit le segment rectiligne quand t varie de 0 à 1. Si l'on remplace dans $F(z)$ z par la valeur variable $z_0 + t\zeta$, on aura une fonction $F(z_0+t\zeta)$ de la variable réelle t. Lorsque t variera de 0 à 1 et même au-delà, cette fonction admettra des dérivées par rapport à t jusqu'à l'ordre n. On obtiendra ces dérivées par l'application du théorème des fonctions de fonctions: ce sont:

$$\zeta F'(z_0+t\zeta),\quad \zeta^2 F''(z_0+t\zeta),\ \text{etc}$$

en appelant $F'(z)$, $F''(z)$..... les dérivées successives par rapp. à z. Appliquons la formule de Maclaurin généralisée:

$$F(z_0+t\zeta) = F(z_0) + \frac{\zeta}{1}F'(z_0) + \frac{\zeta^2}{1.2}F''(z_0) + \dots\dots$$

$$\dots\dots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}F^{n-1}(z_0) + \frac{\zeta^n}{n!}F^n(z_0+\theta t\zeta)$$

Faisons maintenant $t = 1$: la formule devient :

$$F(z_0+\zeta) = F(z_0) + \frac{\zeta}{1} F'(z_0) + \frac{\zeta^2}{1.2.} F''(z_0) + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(z_0) + \lambda \frac{\zeta^n}{n!} F^n(z_0 + \theta\zeta)$$

λ étant une imaginaire dont le module est inférieur à $\sqrt{2}$ et même à 1. C'est une formule analogue à celle de Taylor.

— La question est maintenant de savoir s'il existe des fonctions imaginaires admettant des dérivées, et d'en construire de telles, s'il est possible. Or nous en avons déjà formé en associant 2 fonctions réelles ; on peut en déduire d'autres par le théorème des fonctions inverses. Mais tout cela donne peu de résultats. C'est la théorie des équations différentielles qui fournit le moyen général de construire des fonctions de variables imaginaires. Nous allons indiquer les deux principaux procédés ; ce sont : 1° la considération de la continuité ; 2° la considération des séries.

— Le 1er procédé, applicable à l'étude des fonctions d'une variable imaginaire qui n'admettent pas de dérivée, consiste dans l'étude de l'argument d'une variable imaginaire. Cet argument est une fonction de la variable, mais pour chaque valeur de la variable il a une infinité de valeurs distinctes et déterminées. ~~Pour~~ Il faut qu'on puisse définir l'argument comme une fonction univoque de la variable. C'est d'ailleurs une fonction réelle ; ~~elle n'admet~~ une de ses valeurs est : arctang $\frac{y}{x}$. La dérivée de cette fonction ne satisfait pas aux conditions des fonctions imaginaires.

Etude de l'argument d'une variable imaginaire.

L'argument du point z dans le plan Ox, Oy s'obtient, avons-nous dit, en faisant tourner une demi-droite mobile depuis Ox jusqu'à Oz, et en mesurant l'angle décrit par l'arc engendré sur la circonférence de rayon 1, pris avec le signe de la rotation.

Il faut établir certaines conventions qui fassent disparaître l'ambiguïté de cette définition, qui ne détermine l'argument qu'à un multiple près de 2π.

Par le point O menons une demi-droite indéfinie coupant le plan, et assujettissons le point z à ne jamais traverser cette coupure. On définira alors l'argument de z l'angle engendré par une demi-droite qui passe de Ox à Oz sans traverser la coupure. L'argument est ainsi parfaitement défini pour tous les points du plan sauf pour ceux de la coupure. C'est une fonction univoque et continue de z dans tout le plan.

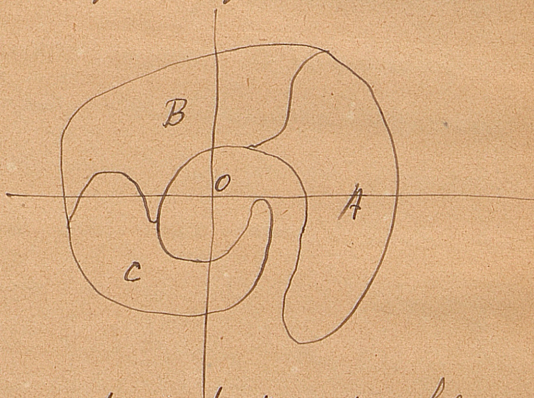
En 2 points situés de part et d'autre de la coupure, et aussi voisins qu'on le voudra, les arguments n'ont pas des valeurs voisines, mais ils diffèrent d'une quantité voisine de 2π.

On pourrait prendre pour argument l'angle défini ci-dessus augmenté de 2π, de 4π, etc. ou diminué d'autant. On peut ainsi définir une infinité de fonctions univoques et continues de z, qui diffèrent entre elles pour un même point d'un multiple de 2π. Si l'on assujettit l'argument à être continu et qu'on se donne sa valeur pour un point quelconque z_0, on définit une fonction

univoque de z pour tous les points du plan.

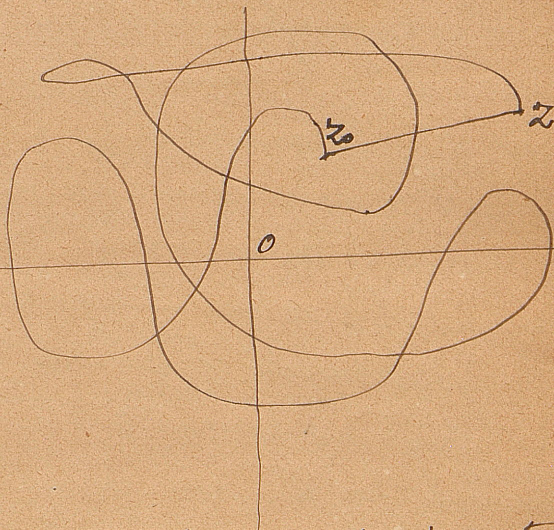
Considérons une aire quelconque limitée par un contour simple, ne contenant pas le point O, et telle qu'on puisse mener par O une demi-droite qui ne la rencontre pas; prenons cette droite pour coupure. Si l'on se donne l'argument d'un point z_0 de cette aire, l'argument de z sera entièrement défini pour tous les points de cette aire (situés à l'intérieur ou sur son contour).

Considérons maintenant une aire quelconque à contour simple ne contenant pas le point O; l'argument est encore défini dans toute cette aire pourvu qu'on se donne sa valeur pour un point z_0. En effet, on peut couper cette aire en morceaux tels que chacun soit limité par un contour simple, et qu'on puisse pour chacun mener par O une demi-droite qui ne le rencontre pas. Supposons que z_0 soit situé dans la portion A; en un point z_1 du contour commun à A et à B, l'argument est défini; donc il est défini dans toute la portion B, et ainsi de suite.



Ainsi l'argument est défini comme fonction univoque de z dans une aire quelconque limitée par un contour simple et ne contenant pas le point O, quand on se donne l'argument d'un point quelconque de cette aire, et qu'on assujettit cette fonction à varier d'une façon continue.

Considérons d'autre part une courbe quelconque partant d'un point z_0 et aboutissant à un point z sans passer par le p.t O. On peut découper cette ligne en portions telles que l'une quelconque d'entre elles ne soit pas traversée par une demi-droite convenablement choisie, issue du point O.



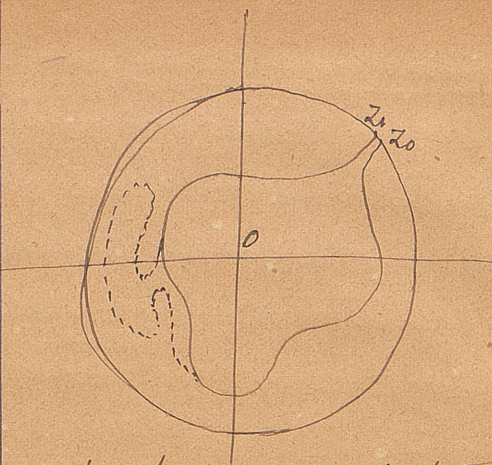
Si l'on se donne l'argument du point z_0, et que l'on décrive la courbe d'une façon continue, l'argument sera défini d'une façon continue et univoque jusqu'au point z, pourvu que la courbe soit décrite dans un sens absolument déterminé.

Or, si la courbe pouvait être contenue dans une aire à contour simple n'enfermant pas le point O, on pourrait revenir de z à z_0 en y retrouvant le même argument qu'au départ.

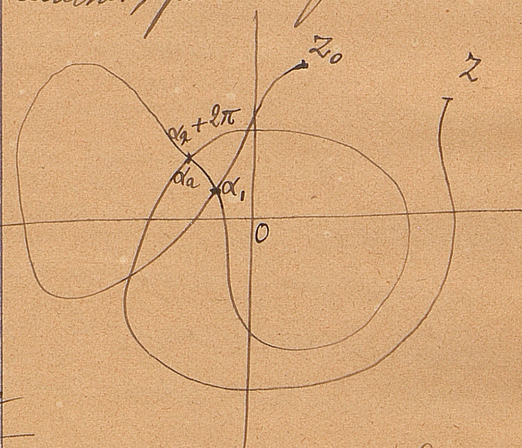
Dans le cas d'un cercle ayant O pour centre et décrit à partir de z_0 dans le sens direct, l'argument de z_0 est augmenté de 2π après un tour ; il est diminué de 2π si le tour est fait dans le sens inverse. Après k tours, il est augmenté ou diminué de $2k\pi$. — La même conclusion subsiste si le point z décrit une courbe quelconque enfermant le point O et revenant au point z_0 sans se croiser.

Pour plus de précision, prenons 2 points voisins z_0, z_1 où se

terminent à la fois la courbe considérée et le cercle de centre O, l'aire comprise entre le cercle et la courbe ne contient pas O ; l'argument est donc défini dans l'aire entière, si l'on se donne sa valeur pour z_0 ; l'argument de z_1 a toujours la même valeur, soit qu'on suive le cercle, soit qu'on suive la courbe ; donc, si z_1 vient se confondre avec z_0, il aura le même argument augmenté ou diminué de 2π.



Les sinuosités de la courbe faisant rebrousser le rayon vecteur dans sa rotation ne changent rien à ce résultat, pourvu que la courbe ne se croise pas elle-même (pointillé)



Quand la courbe se croise, l'argument reste le même au point de croisement ou augmente de 2π, suivant que la boucle n'enferme pas ou enferme le point O —

En résumé, autant de tours le rayon vecteur fait autour de O, autant de fois l'argument est augmenté ou diminué de 2π. Ces règles suffisent pour déterminer l'argument le long d'une courbe aussi compliquée qu'on voudra l'imaginer.

Nous venons de définir l'argument comme fonction univoque. On pourrait définir de même l'angle de 2 directions issues du p^t O ~~d'attant~~ à 2 points z, z_1. L'angle zOz_1 s'obtiendra en faisant passer une demi-droite de Oz à Oz_1 sans traverser la coupure. On définit ainsi un angle zz_1 unique et inférieur à 2π.

On a évidemment : $z_1 z = -zz_1$.

On a aussi : $zz_1 + z_1 z_2 + z_2 z = 0$

En effet, on peut remplacer les 3 points z, z_1, z_2 par leurs perspectives sur le cercle de rayon 1 ayant O pour centre, et prendre pour chaque arc zz_1, $z_1 z_2$, $z_2 z$ celui des 2 arcs déterminés par les 2 points qui ne rencontre pas la coupure. On a alors :

$$zz_2 = zz_1 + z_1 z_2 \quad \text{ou} \quad zz_1 + z_1 z_2 + z_2 z = 0$$

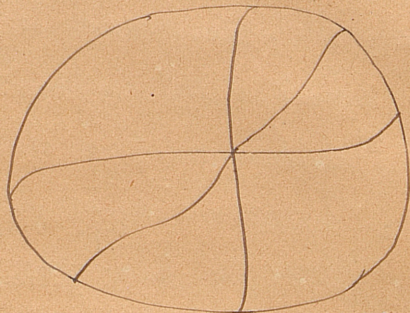
ce qui montre que la relation est symétrique par rapport aux 3 angles ou aux 3 arcs, quand on parcourt ces arcs comme un circuit fermé.

L'angle de 2 directions ~~quelconques~~ variables pourra être défini d'une manière univoque, comme l'argument, en supposant que l'un des points z décrive dans un sens déterminé une courbe ne passant pas par l'origine, ou bien qu'il reste enfermé dans une aire à contour simple ne contenant pas l'origine. Dans ces conditions, la relation précédente subsiste dans tous les cas.

L'angle zz_1 n'est autre chose que la différence des arguments de z et de z_1. On voit que si l'on imagine qu'un point se déplace sur une courbe d'une façon continue et dans un sens déterminé, la variation

de l'argument ne dépend pas de la première valeur qu'on lui attribue.
Si l'on partage une courbe en morceaux bout à bout, la variation totale de l'argument le long de cette courbe est la somme des variations partielles.

Si l'on considère un contour simple et qu'on le décompose en plusieurs autres contours simples par des courbes transversales, la variation de l'argument, quand on part d'un point de ce contour et qu'on le suit dans le sens direct jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, est égale à la somme des variations obtenues en parcourant chacun des contours fermés dans le même sens — En effet, les variations correspondant aux contours intérieurs se détruisent dans la somme, puisque chacun de ces contours est parcouru 2 fois ~~dans~~ en sens inverse.



— Si, au lieu de considérer une variable imaginaire, nous considérions une fonction de cette variable soit $f(z)$ continue pour toutes les valeurs de z représentées par les points situés à l'intérieur d'une certaine aire A, nous pourrions définir d'une manière univoque l'argument de $f(z)$ comme nous avons fait celui de z, puisque cette définition repose uniquement sur la continuité, à la seule condition qu'on ne passe pas par le point 0, càd que $f(z)$ ne s'annule pas, ou encore que z ne passe pas par les racines de l'équation:
$$f(z) = 0.$$

Supposons, pour préciser, que le point qui représente $f(z)$ reste dans une certaine aire limitée par un contour simple et ne contenant pas l'origine ; la valeur de l'argument de $f(z)$ sera déterminée par continuité pour tous les points de cette aire dès qu'on lui assignera une certaine valeur pour un point fixe.

Si, z décrivant une courbe continue, $f(z)$ décrit aussi une courbe continue sans passer par l'origine, l'argument de $f(z)$ sera déterminé pour ~~tous les~~ chaque points de la courbe si on se donne sa valeur pour un point initial arbitraire, et si de plus on connaît le chemin correspondant parcouru par z.

De même, la proposition concernant un contour simple qu'on fait décrire au point z dans un sens déterminé s'applique aux variations de l'argument de $f(z)$ le long d'un contour simple.

— Remarquons que tout ce qui a été dit sur la manière de définir l'argument de z et d'en étudier les variations s'applique à la définition et à la variation de l'argument de $(z-a)$; il suffit de transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à placer l'origine au point a.

Si le point z est assujetti à se mouvoir dans une aire limitée par un contour simple et ne contenant pas a, l'argument de $(z-a)$ sera fixé dans cette aire si l'on se donne sa valeur pour un point quelconque — Il sera fixé de même le long d'une courbe quelconque ne passant pas par a. Si le point z décrit une courbe fermée qui ne contienne pas a, l'argument de $(z-a)$ reprendra

sa valeur initiale. — Si la courbe enferme le point a, l'argument de $(z-a)$ aura varié de 2π.

— Considérons le produit :

$$A(z-a_1)(z-a_2)\ldots\ldots\ldots(z-a_n) = f(z)$$

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ et A étant des constantes. C'est un polynôme entier en z, c.à.d. une fonction continue de z. Pour une valeur de z différente de $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, on peut prendre pour argument du polynôme la somme des arguments des binômes $(z-a_i)$, et si l'on fait varier z d'une manière continue sans passer par aucun point a_i, la somme de ces arguments variera d'une façon continue, et on aura toujours pour l'argument de $f(z)$ la même valeur que si l'on avait suivi la valeur de cet argument à partir de la valeur initiale, en supposant que le point $f(z)$ se déplace d'une ~~manière~~ façon continue de manière à toujours correspondre au point z dont il est fonction.

Imaginons que la variable z décrive un contour simple quelconque ne passant par aucun point a_i, et le suive dans le sens direct. Si a_1 n'est pas situé à l'intérieur de ce contour, l'argument de $(z-a_1)$ ne change pas de valeur après un tour ; au contraire, il augmente de 2π si a_1 est à l'intérieur.

L'argument augmente donc d'autant de fois 2π, après un tour, qu'il y a de points a_i situés à l'intérieur du contour.

Autrement dit :

Théorème de Cauchy. Si l'on considère un polynôme entier

en z et un contour simple quelconque, et qu'on suppose que z décrive ce contour dans le sens direct, la variation de l'argument après un tour contient autant de fois 2π que le contour enferme de racines de ce polynôme.

Les racines multiples comptent pour autant de racines qu'il y a d'unités dans leur ordre.

Cette importante proposition a pour conséquences des propriétés déjà démontrées, par exemple la possibilité de décomposer un polynôme entier du degré n en x en un produit de n binômes du 1er degré en x.

— Ces considérations ne nous ont fait encore connaître aucune fonction nouvelle. Cependant elles nous amènent à en définir une fort remarquable.

Soit une variable imaginaire : $z = x + iy$.
Considérons la fonction de z définie comme suit :

$$f(z) = \mathrm{L}\sqrt{x^2+y^2} + i\,(\arg z)$$

$\arg z = \alpha$ défini par les relations :

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Cette fonction sera complètement définie dans les mêmes conditions que l'argument, par ex. si l'on fait une coupure dans le plan et que l'on fixe une valeur ~~pour~~ de l'argument pour un certain point z (par ex. pour z réel et positif)

On peut constater que les fonctions réelles qui composent $f(z)$

satisfont aux conditions que traduisent les équations aux dérivées partielles ; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

On a : $\varphi = L\sqrt{x^2+y^2}$ $\psi = \arg z = \alpha$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Prenons les dérivées de $\operatorname{tg} \alpha$, par rapport à x et à y :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \qquad \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

[ou plutôt : $d \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$
$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$]

D'où : $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$.

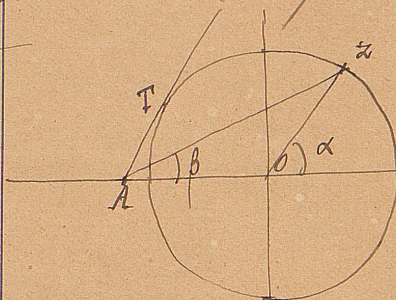
La dérivée de la fonction par rapport à z est :

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}.$$

Cette fonction ayant pour dérivée $\frac{1}{z}$, s'appellera par analogie <u>logarithme de z</u>. Elle n'est d'ailleurs entièrement déterminée que si l'on définit l'argument de z d'une manière univoque. La propriété fondamentale des logarithmes subsiste pour cette fonction : c'est ce qui en justifie l'introduction. On voit en effet aisément que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs. La somme des logarithmes des modules des facteurs est égale au logarithme du produit de ces modules, et ~~l'argument~~ la somme des arguments de ces facteurs est égale à l'argument ~~du~~ de leur produit.

Argument de $(1+z) = z-(-1)$. Prenons le point $A = -1$.
On pourra définir z dans un contour simple ne contenant pas A; par ex. dans un cercle ayant pour centre O et pour rayon $1-\varepsilon$.

L'argument de $(1+z)$ sera l'angle OAz; pour qu'il soit complètement défini, on peut supposer qu'il est nul pour z réel et positif. Il sera toujours inférieur à l'angle droit OAT, tout en pouvant différer de $90°$ d'aussi peu qu'on voudra.



On peut arriver aux mêmes conclusions analytiquement.

Supposons: $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$1+z = 1+\rho\cos\alpha + \rho i \sin\alpha \qquad |1+z| = \sqrt{1+2\rho\cos\alpha+\rho^2}$$

$$\cos\beta = \frac{1+\rho\cos\alpha}{\sqrt{1+2\rho\cos\alpha+\rho^2}} \qquad \sin\beta = \frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{1+2\rho\cos\alpha+\rho^2}}$$

On a toujours $\rho < 1$, ~~donc aussi~~ car on doit avoir:

$$1+\rho\cos\alpha > 0$$

On peut prendre pour la valeur de l'argument l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, c.à.d. la valeur géométrique de:

$$\text{arc tang} \frac{\rho\sin\alpha}{1+\rho\cos\alpha}$$

D'où l'expression suivante du logarithme de $(1+z)$:

$$L(1+\rho\cos\alpha+\rho i\sin\alpha) = L\sqrt{1+2\rho\cos\alpha+\rho^2} + i \,\text{arctg} \frac{\rho\sin\alpha}{1+\rho\cos\alpha}$$

Telle est une des déterminations du logarithme pourvu que $\rho < 1$.
Les autres s'obtiendraient en ajoutant à celle-là: $2k\pi i$.

Ainsi, quand un point décrit un contour fermé, après un tour complet, son module reprend la même valeur, c.à.d. que la partie réelle de l'affixe de son logarithme a la même valeur. La partie imaginaire varie comme l'argument du point, de sorte qu'au lieu de considérer la variation du log. d'un polynôme on peut étudier celle de son argument.

Racine carrée de z. Cherchons s'il existe une fonction u de z telle que l'on ait : $u^2 = z$.

Posons : $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ On voit immédiatement que : $\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ satisfait à l'éq. précédente.

Il est manifeste que lorsque z varie d'une façon continue, u varie aussi d'une façon continue.

Nous pouvons appeler $\sqrt{z}$ la racine de l'éq : $u^2 = z$; cette racine sera définie toutes les fois que l'argument de z le sera.

– Supposons que z décrive dans le sens direct un contour simple enfermant l'origine. Après un tour entier, son argument aura augmenté de 2π. L'argument de $\sqrt{z}$ aura augmenté de π, c.à.d. que $\sqrt{z}$ aura changé de signe. On en conclut que $\sqrt{z}$ ne peut avoir que 2 valeurs égales et de signes contraires ; en effet, à chaque tour fait par z, la valeur de $\sqrt{z}$ fait un demi-tour, c.à.d. passe de l'une à l'autre de ces 2 valeurs. Aux valeurs de l'argument de z, qui diffèrent entre elles de 2π, correspond une série de valeurs de l'argument de $\sqrt{z}$, qui diffèrent entre elles de π.

La fonction $\sqrt{z}$ est-elle déterminée ? – Appliquons le théorème

des fonctions inverses; s'il y a une fonction continue de z satisfaisant à l'équation : $u^2 = z$,

sa dérivée doit être $\frac{1}{2u} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

Supposons que l'on mène dans le plan une coupure issue du p. O. $\sqrt{z}$ sera entièrement définie dans tout le plan. Considérons 2 points voisins de part et d'autre de la coupure, pour ces 2 points les valeurs de $\sqrt{z}$ ne sont pas voisines, mais chacune est voisine de l'autre changée de signe.

— On pourrait définir de même : $\sqrt{z-a}$,
car on sait définir l'argument de $(z-a)$.
On trouve par le théorème des fonctions de fonctions que la dérivée de $\sqrt{z-a}$ est $\frac{1}{2\sqrt{z-a}}$

On trouvera de même la dérivée de $\sqrt{f(z)}$ pourvu qu'on sache définir l'argument de $f(z)$; ce sera : $\frac{f'(z)}{2\sqrt{f(z)}}$

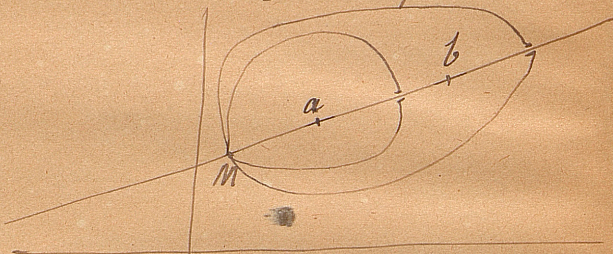
En particulier, on pourra définir $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ quand on sait définir l'argument de $(z-a)$ et de $(z-b)$.

Marquons dans le plan les points a, b ; dans toute aire limitée par un contour simple et ne contenant pas a, b, l'argument de $(z-a)$ et de $(z-b)$ est entièrement déterminé. Il est aussi défini le long d'une courbe ne passant pas par a, b, pourvu qu'on se donne sa valeur initiale.

Si z suit un contour simple qui enferme les points a, b,

l'argument de $(z-a)(z-b)$ aura augmenté de 4π après un tour, et celui de $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ aura augmenté de 2π, c.à.d. que l'affixe de $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ n'aura pas changé.

Traçons une coupure rectiligne par les points a, b; la fonction $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ sera déterminée dans tout le plan si on se donne un système de valeurs pour les arguments de $(z-a)$, $(z-b)$. On peut définir l'argument de $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ par sa valeur en un point M de la coupure; cette détermination sera étendue aux 2 moitiés du plan. Considérons 2 courbes issues du point M de chaque côté de la coupure et aboutissant à la coupure entre les points a, b;



les 2 valeurs du ~~l'argument~~ radical, de part et d'autre de la coupure, sont presque égales, mais de signes contraires: en effet, l'argument de $(z-a)$ a varié de 2π sans que l'argument de $(z-b)$ ait changé; donc l'argument de $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ a varié de π.

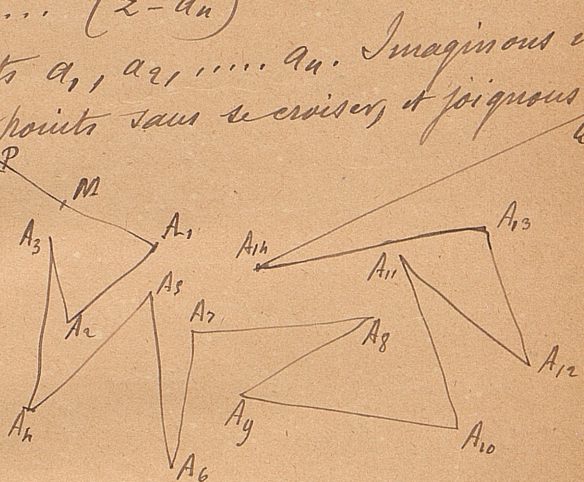
Si l'on trace des courbes issues du p. M et aboutissant de part et d'autre de la coupure au delà de a, b, les 2 valeurs du radical sont presque égales, et de même signe, parce que l'argument du radical a varié de 2π. On peut donc effacer la coupure en dehors du segment a, b; il suffit de s'interdire de faire traverser ce segment à z. Ainsi la fonction $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ est

définie d'une façon univoque (et continue) pour tout le plan (sauf pour les p. du segment a, b) et de chaque côté de ce segment, ses valeurs sont égales et de signes contraires.

— On peut étendre ces conclusions à la fonction :

$$\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)\ldots\ldots(z-a_n)}$$

Marquons sur le plan les points $a_1, a_2, \ldots a_n$. Imaginons une ligne brisée joignant tous ces points sans se croiser, et joignons-y 2 demi-droites qui achèvent la coupure sans croiser la ligne brisée ; l'argument de la fonction sera défini dans les 2 moitiés du plan. Mais si l'on prend pour valeur initiale celle qu'il a au p. M, sur la demi droite A_1P, on vient de voir que les valeurs seront égales et de même signe de chaque côté du 2e segment A_2A_3, puis de chaque côté du 2e segment A_4A_5, et ainsi de suite. On pourra donc supprimer la demi-droite A_1P et tous les segments d'ordre pair. Si leur nombre est impair (c.à.d. n pair) la demi-droite A_nQ disparaît ; sinon, elle subsiste comme coupure.



— Plus généralement, on peut définir la fonction de z :

$$u = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)$$

quand on a défini l'argument de z. On voit que u est susceptible de n valeurs distinctes qu'on obtient en faisant tourner z n fois autour de O. On pourra définir l'argument de $\sqrt[n]{z}$ d'une façon univoque et continue

Suites, Séries et produits infinis.

Etant donné une suite de nombres réels

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ldots\ u_n\ ,$$

dont chacun est déterminé par son rang n, on dit qu'elle a une limite A quand à un nombre positif quelconque ε on peut faire correspondre un entier p tel qu'on ait :

$$|A - u_n| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n > p.$$

De même, une suite de nombres imaginaires aura pour limite A quand on pourra écrire :

$$\mathrm{mod}\,(A - u_n) < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad n > p.$$

Si, dans le cas de termes imaginaires, on a :

$$u_n = a_n + i b_n \qquad \text{et} \qquad A = p + qi$$

on aura : $\quad A - u_n = p - a_n + i(q - b_n)$

Pour que le module de cette expression soit inférieur à ε, il faut qu'on ait séparément : $\quad p - a_n < \varepsilon, \qquad q - b_n < \varepsilon$;

il faut donc que la suite a_n ait pour limite p, et la suite b_n pour limite q.

On démontrerait que réciproquement, si les nombres a_n ont pour limite p, et les nombres b_n ont pour limite q, les nombres $(a_n + i b_n)$ ont pour limite $(p + qi)$.

Ainsi, dire qu'une suite de nombres imaginaires admet une limite, c'est dire que 2 suites de nombres réels ont des limites.



On étend sans difficulté aux suites à termes imaginaires les propriétés démontrées pour les suites de nombres réels.

En particulier, la règle de convergence de Cauchy s'applique presque sans modification aux suites à termes imaginaires :

— Pour qu'une suite admette une limite il faut qu'à chaque nombre positif ε on puisse faire correspondre un entier p tel qu'on ait :

$$|u_n - u_{n'}| < \varepsilon \qquad \text{pourvu que} \qquad n > n' \geqq p.$$

La condition est évidemment nécessaire pour les nombres imaginaires comme pour les nombres réels. Elle est aussi suffisante : car si elle est remplie, les 2 suites formées par les éléments réels de u_n ont chacune une limite.

— Considérons maintenant les séries dont les termes sont des nombres qui ne dépendent que de l'indice, ou séries à termes constants. Toute la théorie des séries repose sur la considération des séries à termes réels et positifs.

Soit : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n + \dots\dots$

une série à termes réels et positifs. Appelons S_n la somme des n premiers termes. S_n ne peut que croître quand n grandit indéfiniment. Si S_n reste constamment inférieure à un nombre fixe, elle a une limite qui est la somme des termes de la série infinie, et qui est indépendante de l'ordre de ces termes.

En effet, soit : $b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots + b_n + \dots\dots$

une série obtenue en changeant l'ordre des termes de la série a_n. La somme de la 2e série est au plus égale à S; donc elle a une limite. Soit maintenant un nombre $S' < S$; on peut prendre dans la 2e série assez de termes pour que leur somme dépasse S'. Donc la somme de la 2e série infinie est égale à S; ~~cette série~~ elle a encore pour limite S.

— Pour s'assurer de la convergence d'une série à termes positifs, le procédé général consiste à la comparer à une autre dont on connaît la convergence ou la divergence; si les termes de la série en question deviennent à partir d'un certain rang inférieurs aux termes correspondants de la série convergente ou supérieurs aux termes correspondants de la série divergente la série considérée est convergente ou divergente.

On établit aisément les 2 propositions suivantes:

Si 2 séries à termes positifs, a_n, b_n, sont telles que le rapport des 2 termes correspondants $\frac{a_n}{b_n}$ tende vers un nombre fixe K, si la 1e série est convergente la 2e l'est.

Si K est nul, et que la 2e série soit convergente, la 1e l'est aussi.

— Soit maintenant une série à termes imaginaires:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n + \dots\dots$$

On dira qu'elle est <u>convergente</u> si la somme des n premiers termes tend vers une limite quand n croît indéfiniment. On dira qu'elle est <u>absolument convergente</u> si la série

des valeurs absolues : $|a_1| + |a_2| + \ldots\ldots + |a_n| + \ldots\ldots$
est convergente dans le 1er sens, c.à.d. que la somme de ses termes a une limite. On peut s'en rendre compte en considérant les 2 séries formées par les éléments réels des termes imaginaires. On peut aussi appliquer la règle de Cauchy :

Pour qu'une suite soit convergente, il faut qu'à chaque nombre positif ε on puisse faire correspondre un entier p tel qu'on ait : $|u_n - u_{n'}| < \varepsilon$ pourvu que $n > n' \geq p$.

Or $S_n - S_{n'} = a_{n'+1} + a_{n'+2} + \ldots\ldots\ldots + a_n$

et par conséquent, à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel que, pour $n > n' \geq p$,

on ait : $|a_{n'+1}| + |a_{n'+2}| + \ldots\ldots\ldots + |a_n| < \varepsilon$

or la somme des modules est au ~~plus~~ moins égale au module de la somme : donc à fortiori : $|S_n - S_{n'}| < \varepsilon$,

ce qui prouve que la suite S_n ou la série a_n a une limite.

Cette limite est indépendante de l'ordre des termes ; soit la nouvelle série : $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots$

obtenue en intervertissant l'ordre des termes de la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$$

La série ; $|b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots\ldots + |b_n| + \ldots\ldots$

ne diffère que par l'ordre de la série

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots\ldots + |a_n| + \ldots\ldots$$

donc elle a même limite ou même somme : par conséquent,

la série b_n est absolument convergente comme la série a_n. Reste à prouver qu'elle a même somme. Soit S_n la somme des n premiers termes de la série a_n, et T_n la somme des n premiers termes de la série b_n. Après avoir formé T_n, prenons dans la série a_n un nombre de termes $n' > n$ suffisant pour que tous les termes de T_n figurent dans $S_{n'}$. Soient d'autre part σ_n, τ_n les sommes correspondantes des séries des valeurs absolues de a_n, b_n ; on a évidemment :

$$|S_{n'} - T_n| \leqslant \sigma_{n'} - \tau_n$$

en vertu de la propriété du module d'une somme. Si n augmente indéfiniment, τ_n tend vers la somme des valeurs absolues, et $\sigma_{n'}$ aussi, car n' augmente indéfiniment avec n ; donc le 2e membre de l'inégalité tend vers 0, et le 1er aussi ; or $S_{n'}$ et T_n ont pour limites respectives les sommes des 2 séries a_n et b_n ; donc ces sommes sont égales.

— A ces propositions élémentaires sur les séries rattachons quelques théorèmes analogues touchant les produits infinis. Considérons une suite infinie : $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$ et le produit infini : $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots\ldots(1+a_n)\ldots\ldots$ Soit P_n le produit des n premiers facteurs. Il paraît naturel de dire que le produit infini est convergent lorsque P_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Mais nous imposons

une restriction à la définition de la convergence d'un produit infini.

Considérons le cas où $a_1, a_2, \dots\dots a_n$ sont positifs ou nuls et cherchons la condition pour que P_n tende vers une limite quand n augmente indéfiniment. Or P_n ne peut qu'augmenter quand n augmente; donc, pour que P_n ait une limite, il suffit qu'il reste inférieur à un nombre fixe. Développons ce produit:

$$P_n = 1 + \Sigma a_1 + \Sigma a_1 a_2 + \Sigma a_1 a_2 a_3 + \dots\dots + \Sigma a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

Pour que P_n n'augmente pas indéfiniment, il faut ~~que a_n~~ le produit des ne croisse pas indéfiniment avec n, c.à.d. que la ~~série~~ a_n soit convergente.

Réciproquement, si cette ~~série~~ est convergente, le produit P_n l'est aussi. En effet,

$$P_n < 1 + S_n + \frac{S_n^2}{1.2} + \frac{S_n^3}{1.2.3} + \dots\dots + \frac{S_n^n}{n!} < e^S$$

car $S_n < S$.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que P_n ait une limite, quand n augmente indéfiniment, est que la série des nombres positifs ou nuls: ~~la~~ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n + \dots$ soit convergente. Cette limite peut s'écrire

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n) = e^S \qquad S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots$$

Considérons la série $b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots + b_n + \dots\dots$ obtenue en rangeant les termes de la série a_n dans un autre ordre; le produit infini $(1+b_1)(1+b_2)\dots\dots(1+b_n)\dots\dots$

sera encore convergent, puisque la série b_n est convergente.
Reste à prouver que sa limite est la même que celle du produit $(1+a_n)$. Or soit P la valeur du 1er produit infini ; comme tous les facteurs du 2e figurent dans le 1er, leur produit est au plus égal à P ; donc ce produit est convergent (dans le 2e sens). D'autre part, si l'on prend un nombre $P' < P$, on peut prendre dans le 1er produit et par suite dans le 2e assez de facteurs pour que leur produit dépasse P'. Donc le 2e produit infini est égal à P.

Cela posé, et les nombres $a_1, a_2, \dots a_n$ étant quelconques, on dira que le produit infini : $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+a_n)$
est <u>absolument convergent</u> si la série : $|a_1|+|a_2|+|a_3|+ \dots +|a_n|+ \dots$
est convergente, et l'on va prouver que dans ces conditions, le produit P_n des n premiers facteurs tend vers une limite quand n augmente indéfiniment.

Tout d'abord, le produit infini : $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+|a_n|)$
est sûrement convergent, donc le produit Q_n de ses n premiers facteurs tend vers une limite Q. Pour prouver que P_n a une limite pour $n=\infty$, il suffit de montrer qu'à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel qu'on ait :
$|P_{n'} - P_n| < \varepsilon$ à la condition : $n' > n \geqq p$.
Or puisque Q_n a une limite, je puis dans les mêmes conditions avoir l'inégalité : $Q_{n'} - Q_n < \varepsilon$.

Supposons qu'on développe le produit P_n sous la forme d'un polynôme entier en $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, à coefficients positifs tous égaux à 1. Si on le multiplie par $(1 + a_{n+1})$, on a d'abord tous les termes précédents, plus d'autres obtenus en multipliant ceux-ci par a_{n+1}. Donc, si l'on forme 2 produits P_n, $P_{n'}$, dont le 2e contient quelques facteurs de plus que le 1er, et qu'on les développe, tous les termes du 1er figureront dans le 2e; leur différence sera un polynôme entier à coefficients positifs. On voit qu'on peut déduire le développement de $(Q_{n'} - Q_n)$ de celui de $(P_{n'} - P_n)$ en remplaçant dans ce dernier tous les termes par leur valeur absolue. Or, quand un polynôme a tous ses coefficients positifs, le module de ce polynôme est au plus égal au polynôme qu'on obtient en remplaçant tous les termes par leur valeur absolue. Donc si : $Q_{n'} - Q_n < \varepsilon$, on aura à fortiori :

$$|P_{n'} - P_n| < \varepsilon.$$

Ainsi, quand un produit infini est absolument convergent, le produit de ses n premiers termes tend vers une limite. Nous allons prouver maintenant que cette limite ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

Supposons qu'on intervertisse l'ordre des facteurs du produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+a_n)$ de manière à former le produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+b_n)$ — Celui-ci est absolument convergent, puisque la série (b_n) est absolument convergente et a pour

limite la somme de la série infinie (a_n). Donc P'_n tend vers une limite; reste à prouver que cette limite est celle de P_n.
Considérons le produit infini: $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+[b_n])$
Soit Q'_n le produit des n premiers facteurs. Q'_n a la même limite que Q_n, à savoir Q.

Cela posé, prenons dans le 2e produit infini un certain nombre de facteurs, n par ex. dont le produit est P'_n; prenons dans le 1er produit infini un nombre k de facteurs suffisant pour que P_k contienne tous les facteurs de P'_n; et comparons la valeur absolue de $(P_k - P'_n)$ à $(Q_k - Q'_n)$
On verrait, par le même raisonnement que ci-dessus, que si l'on développe P_k et P'_n, tous les termes de P'_n sont dans P_k; la différence $(P_k - P'_n)$ est donc un polynôme entier à coefficients positifs. La différence $(Q_k - Q'_n)$ se déduit de la précédente en remplaçant tous les termes par leurs valeurs absolues.
Donc: $Q_k - Q'_n \geqq |P_k - P'_n|$
Laissons n fixe et faisons croître k indéfiniment; on aura à la limite: $|P - P'_n| \leq Q - Q'_n$
Faisons maintenant croître n indéfiniment; Q'_n tend vers sa limite Q, donc le 2e membre tend vers 0; le 1er membre est essentiellement positif; donc il tend aussi vers 0, c.à.d. que P'_n a pour limite P.

Théorème. Un produit infini absolument convergent ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul.

Nous établirons d'abord cette propriété pour un produit où tous les termes $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ sont en valeur absolue inférieurs à 1. On sait que la série $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$ est convergente, et de plus que $|a_n| < 1$.

Formons le produit P_n et son inverse :

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{1+a_1} \cdot \frac{1}{1+a_2} \cdot \frac{1}{1+a_3} \cdots\cdots \frac{1}{1+a_n}$$

$$= \left(1 - \frac{a_1}{1+a_1}\right)\left(1 - \frac{a_2}{1+a_2}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right)$$

Or la série : $\left|\frac{a_1}{1+a_1}\right| + \left|\frac{a_2}{1+a_2}\right| + \left|\frac{a_3}{1+a_3}\right| + \ldots\ldots$

est convergente, car ~~comparée~~ si on la compare à la série convergente a_n, le rapport ~~des~~ 2 termes correspondants est $(1 + a_n)$ qui a pour limite l'unité. — Donc, quand n augmente indéfiniment, la quantité $\frac{1}{P_n}$ tend vers une limite, et P_n tend aussi vers une limite non nulle. Le produit infini a donc une valeur différente de 0.

Nous allons maintenant démontrer le théorème dans le cas général. Supprimons la restriction : $|a_n| < 1$, mais supposons toujours la série $|a_n|$ convergente. On sait que $|a_n|$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment. Donc, à partir d'un rang r, ~~il est~~ $|a_n|$ est inférieur à 1.

En vertu du lemme précédent, le produit infini

$(1+a_{r+1})(1+a_{r+2})(1+a_{r+3})\ldots\ldots\ldots(1+a_{r+p})\ldots\ldots$
est convergent, et sa valeur est différent de 0. Désignons par S_p le produit de ses p premiers facteurs ; on a manifestement :

$P_{r+p} = P_r \cdot S_p$ Si p croît indéfiniment, S_p tend vers sa limite S, et P_{r+p} vers $P_r . S$.
Or $S \gtrless 0$, donc P_{r+p} ne sera nul que si le produit fini P_r est nul, ce qui exige qu'un de ses facteurs soit nul.

C'est la nécessité de conserver cette propriété fondamentale des produits finis qui fait qu'on ne considère que les produits infinis <u>absolument convergents</u>, ~~et~~ dont la limite est différente de 0.

Il est bon de remarquer une propriété commune à tous les produits infinis pour lesquels le produit des n premiers facteurs tend vers une limite : on a, en vertu de la loi de formation :

$P_{n+1} = P_n + a_{n+1} P_n$ $P_{n+1} - P_n = a_{n+1} P_n$

Cette relation récurrente permet d'exprimer P_n en fonction de P_1, P_2, P_3, etc :

$$P_2 - P_1 = a_2 P_1$$
$$P_3 - P_2 = a_3 P_2$$
$$P_4 - P_3 = a_4 P_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Ajoutons membre à membre :

$$P_n - P_{n-1} = a_n P_{n-1}$$

$$P_n = P_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + a_4 P_3 + \ldots\ldots + a_n P_{n-1}$$
$$= 1 + a_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n P_{n-1}.$$

Si P_n a une limite, le 2e membre tend vers la même limite c.à.d. que la série : $P_1 + a_2 P_1 + a_3 P_2 + a_4 P_3 + \ldots + a_n P_{n-1}$ est convergente. Nous l'appellerons la <u>série équivalente</u> au produit infini.

Quand $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont tous positifs, la série équivalente a tous ses termes positifs ; elle est convergente si la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \ldots + a_n$$

est convergente.

Si les nombres $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont quelconques et que la série a_n soit absolument convergente, la série équivalente sera convergente. Comparons en effet $|a_n|$ à $|a_n P_{n-1}|$: le rapport des 2 termes correspondants est P_{n-1}, qui a une limite ; donc la série $|a_n P_{n-1}|$ est convergente.

22e - Séries à double entrée.

Considérons un système de 2 nombres entiers positifs (α, β), où α, β peuvent prendre indifféremment toutes les valeurs

$$1, 2, 3, 4, \ldots \ldots$$

Deux systèmes de ce genre seront identiques si l'on a séparément :

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta'.$$

Ils seront différents si leurs éléments ne sont pas identiques ou si leur ordre diffère.

Théorème. A chaque ensemble (α, β) de 2 nombres entiers positifs on peut faire correspondre un seul nombre entier, de

telle sorte que le système (α, β) corresponde au seul nombre entier n, et inversement, que le nombre n corresponde au seul système (α, β); et que 2 systèmes différents correspondent à 2 nombres entiers différents, et inversement, que 2 entiers différents correspondent à 2 ensembles différents. Une telle correspondance est dite univoque et réciproque.

La démonstration de cette proposition est presque intuitive au point de vue géométrique. Soit une table à double entrée; on peut désigner chaque case, soit par les 2 nombres qui indiquent respectivement l'ordre de la file horizontale et de la colonne verticale auxquelles appartient la case, et qui la déterminent par leur intersection; soit par un numéro d'ordre linéaire.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46
2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57
3	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69
4	10	14	19	25	32	40	49	59	70	82
5	15	20	26	33	41	50	60	71	83	96
6	21	27	34	42	61	61	72	84	97	111
7	28	35	43	52	62	73	85	98	112	127
8	36	44	53	63	74	86	99	113	128	144
9	45	54	64	75	87	100	114	129	145	162

On voit que la correspondance ainsi établie est univoque & réciproque. On peut d'ailleurs supposer que certaines cases, en nombre fini ou infini, restent vides, autrement dit exclure un certain nombre de systèmes (α, β) la correspondance réciproque n'en sera pas troublée.

On arrive à la même conclusion par des considérations algébriques. Soit p un nombre entier positif; l'équation:

$$x + y = p$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions entières et positives. On

fera successivement $p = 2, 3, 4, \ldots\ldots$ et on rangera les systèmes de solutions de chaque équation de façon que x aille en croissant et y en diminuant ; on formera ainsi la suite :

$x + y = 2$ ———————— $(1, 1)$

$x + y = 3$ ———————— $(1, 2)\ (2, 1)$

$x + y = 4$ ———————— $(1, 3)\ (2, 2)\ (3, 1)$ etc.

Il suffira ensuite de donner un numéro d'ordre à chacun des systèmes de cette suite pour établir une correspondance univoque et réciproque entre ces systèmes et la suite des nombres entiers positifs.

On peut d'ailleurs supprimer tels systèmes qu'on voudra dans cette suite ; la correspondance avec les nombres entiers subsistera.

Remarques. 1° En généralisant ce procédé, on pourrait de même ranger en une suite linéaire les solutions entières et positives des équations de la forme : $x - y = p$

$x^2 + y^2 = p$ $\qquad xy = p$, etc

où l'on ferait p successivement égal à tous les nombres entiers positifs ; on établirait ainsi autant de correspondances nouvelles entre la suite des nombres entiers et des systèmes de 2 nombres.

2° Tout nombre rationnel $\frac{a}{b}$ peut être considéré comme l'ensemble de 2 nombres entiers a, b disposés dans un certain ordre. On voit que tous les nombres rationnels peuvent être rangés en une suite linéaire, de telle sorte qu'à chaque nombre

rationnel corresponde un nombre entier différent, et inversement.

3° On pourrait encore admettre des systèmes dont l'un des éléments serait nul, ou même tous les deux nuls.

– Une série à double entrée est donnée quand chaque terme est déterminé par les deux indices dont il est affecté. Soit $u_{\alpha\beta}$ le terme général d'une telle série, il est supposé connu quand on donne α et β.

Soit une série linéaire : $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n + \ldots\ldots$

Si l'on pose : $u_{\alpha,\beta} = v_n$

on établira entre les 2 séries une correspondance qui permet de ranger les termes de la 1e en une série linéaire, ou ceux de la 2e en un tableau à double entrée.

Supposons que les indices soient des nombres entiers positifs ou nuls. On dira que la série à double entrée $u_{\alpha,\beta}$ est convergente si la somme d'autant de termes qu'on veut pris dans cette série reste inférieure à un nombre fixe. Si la série linéaire v_n admet une limite S, cette limite est la somme de la série à double entrée.

Pour établir cette proposition, nous démontrerons d'abord que la série : $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \ldots\ldots\ldots + u_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots$ est convergente c.à.d. a une somme S_α ; puis, que la série :

$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots\ldots + S_\alpha + \ldots\ldots$

est convergente et a une somme qui est S.

Que la série : $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \ldots$ soit convergente cela est évident, car elle ne contient qu'une partie des termes de la série linéaire v_n, qui a une limite. Elle a donc une somme S_α inférieure à S.

La série : $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_\alpha + \ldots\ldots$ est aussi convergente, car, soit $\Sigma_{\alpha,\beta}$ la somme des β premiers termes de la série $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \ldots\ldots$

et soit $S_{\alpha,\beta} = \Sigma_{1,\beta} + \Sigma_{2,\beta} + \Sigma_{3,\beta} + \ldots\ldots\ldots + \Sigma_{\alpha,\beta}$

$S_{\alpha,\beta}$ sera la somme des $\alpha\beta$ premiers termes de la série à double entrée, dont le 1er indice est au plus égal à α et le 2e au plus égal à β. — Elle est donc la somme des $\alpha\beta$ premiers termes de la série linéaire ; $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n + \ldots\ldots$ donc elle est inférieure à S.

Faisons croître β indéfiniment ; $\Sigma_{\alpha,\beta}$ tend vers S_α, et $S_{\alpha,\beta}$ vers la somme de la série à double entrée ; or on aura toujours : $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_\alpha < S$ quel que soit α, ce qui prouve que la série S_α est convergente et que sa somme est au plus égale à S. — D'autre part, elle ne peut être inférieure à S ; car soit $S' < S$, on pourra toujours prendre dans la série linéaire, et par suite aussi dans la série à double entrée, assez de termes pour que leur somme dépasse S' ; c.à.d. qu'on pourra déterminer des entiers α et β assez grands

pour qu'on ait : $S_{\alpha,\beta} > S'$.

Donc la somme $S_{\alpha,\beta}$ de la série à double entrée a pour limite S quand α, β augmentent indéfiniment.

On représente généralement la somme S_α par $\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} u_{\alpha,\beta}$ et S par $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} u_{\alpha,\beta}$

On aurait pu faire les mêmes raisonnements sur les séries linéaires formées par les colonnes verticales que sur les files horizontales, et établir la convergence de la série

$$u_{1,\beta} + u_{2,\beta} + u_{3,\beta} + \dots\dots\dots + u_{\alpha,\beta} + \dots\dots$$

puis de la série : $S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots\dots + S'_\beta + \dots\dots$

on aurait ainsi : $S = \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha,\beta}$

Cette somme double est donc égale à la précédente ; on les représente en abrégé par l'expression : $\sum_{\alpha=1,\,\beta=1}^{\alpha=\infty,\,\beta=\infty} u_{\alpha,\beta}$

Le théorème précédent permet de grouper les termes d'une série infinie linéaire en séries ~~dont chacune~~ infinies dont le nombre est infini.

— <u>Réciproquement</u>, si la série : $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + \dots\dots + u_{\alpha,\beta} + \dots$ est convergente et a pour somme S_α, et si la série $S_1 + S_2 + S_3 + \dots\dots + S_\alpha + \dots$ est convergente et a pour somme S, la série linéaire correspondante est convergente et a pour somme S.

En effet, dès que la série : $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_\alpha$ est convergente et inférieure à S, la somme d'autant de termes qu'on voudra pris dans le tableau à double entrée et par suite dans la série linéaire sera inférieure à S ; donc la série linéaire est convergente ; en appliquant le théorème direct, on voit que sa limite ne peut qu'être égale à S.

— On peut maintenant admettre des séries à termes imaginaires. On dira que la série à double entrée à termes imaginaires est absolument convergente si la série à double entrée formée par les valeurs absolues de ces termes est convergente, c.à.d. si la série linéaire formée par ces mêmes valeurs est convergente.

On démontrera, comme ci-dessus, que la série

$u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \ldots\ldots + u_{\alpha,\beta}$ est absolument convergente

puis que la série $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_\alpha$ est absolument convergente et a pour limite la somme

$$S = |v_1| + |v_2| + |v_3| + \ldots\ldots\ldots + |v_n| + \ldots\ldots$$

Et d'abord, la série : $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \ldots\ldots + u_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots$ est absolument convergente, car la série :

$|u_{\alpha,1}| + |u_{\alpha,2}| + |u_{\alpha,3}| + \ldots\ldots + |u_{\alpha,\beta}| + \ldots$ est convergente.

Soit S'_α sa somme. On a évidemment : $|S_\alpha| \leq S'_\alpha$.

Or la série ; $S'_1 + S'_2 + S'_3 + \ldots\ldots + S'_\alpha$ est convergente donc à fortiori la série ; $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_\alpha$

est absolument convergente. Posons :

$$\Sigma'_{\alpha,\beta} = |u_{\alpha,1}| + |u_{\alpha,2}| + |u_{\alpha,3}| + \dots\dots + |u_{\alpha,\beta}|$$

et : $$S'_{\alpha,\beta} = \Sigma'_{1,\beta} + \Sigma'_{2,\beta} + \Sigma'_{3,\beta} + \dots\dots + \Sigma'_{\alpha,\beta}$$

c'est la somme des valeurs absolues des $\alpha\beta$ premiers termes du tableau à double entrée, dont le 1er indice est au plus égal à α et le 2e indice au plus égal à β.

Appelons S' la somme : $S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots\dots + S'_\alpha + \dots\dots$ c.à.d. la somme des valeurs absolues des termes de la série à double entrée. — Prenons dans la série linéaire v_n n termes, et soit T_n leur somme, T'_n la somme de leurs valeurs absolues. T_n a pour limite S, et T'_n a pour limite S'.

Prenons les indices α, β assez grands pour que les nombres $v_1, v_2, \dots\dots v_n$ se trouvent parmi les termes de $S_{\alpha,\beta}$. $S_{\alpha,\beta}$ contiendra alors tous les termes de T_n, plus d'autres, dont la somme sera : $(S_{\alpha,\beta} - T_n)$

La somme de leurs valeurs absolues sera la différence : $S'_{\alpha,\beta} - T'_n$ et l'on aura certainement :

$$|S_{\alpha,\beta} - T_n| \leq S'_{\alpha,\beta} - T'_n$$

Le 2e membre est essentiellement positif. Si l'on fait croître β indéfiniment, les quantités $\Sigma_{1,\beta}, \Sigma_{2,\beta}, \dots\dots \Sigma_{\alpha,\beta}$ tendront vers $S_1, S_2, \dots\dots S_\alpha$.

De même, $\Sigma'_{1,\beta}$, $\Sigma'_{2,\beta}$, ... $\Sigma'_{\alpha,\beta}$ tendront vers $S'_1, S'_2, \ldots\ldots S'_\alpha$. L'inégalité précédente devient :

$$\left| S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_\alpha - T_n \right| \leq S'_1 + S'_2 + \ldots\ldots + S'_\alpha - T'_n$$

Augmentons maintenant α indéfiniment :

$S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_\alpha$ tendra vers Σ_1, somme inconnue de la série à double entrée ; $S'_1 + S'_2 + \ldots\ldots + S'_\alpha$ tendra vers S'. On aura donc :

$$\left| \Sigma_1 - T_n \right| \leq S' - T'_n$$

Si maintenant on fait croître n indéfiniment, T'_n tendra vers S' ; le 2e membre de l'inégalité tendra vers 0. Or le 1er membre est toujours positif ; donc il a pour limite 0, c.à.d. que T_n a pour limite Σ_1 ; or T_n a pour limite S ; ces 2 limites sont nécessairement égales : $\Sigma = S$.

— Pour démontrer la réciproque on supposera que les séries telles que : $u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + u_{\alpha,3} + \ldots\ldots + u_{\alpha,\beta} + \ldots$ soient absolument convergentes, et que la série de leurs sommes

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_\alpha + \ldots$$

est absolument convergente. — On ne peut en conclure que la série à double entrée $u_{\alpha,\beta}$ soit convergente. Il faut encore que, en désignant par S'_α la somme des valeurs absolues des termes de S_α, la série

$$S'_1 + S'_2 + S'_3 + \ldots\ldots + S'_\alpha + \ldots$$ soit convergente

— Ce théorème une fois démontré permet de grouper les termes par séries infinies en nombre infini dans les séries linéaires à termes imaginaires.

— Théorème. Étant données 2 séries absolument convergentes :

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_\alpha + \ldots\ldots$$

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_\beta + \ldots\ldots$$

la série à double entrée : $a_\alpha b_\beta$

est absolument convergente, et a pour limite AB.

Supposons d'abord que les nombres a_α, b_β soient positifs.

Considérons les termes d'indice α dans la série à double entrée :

on a : $a_\alpha b_1 + a_\alpha b_2 + a_\alpha b_3 + \ldots\ldots + a_\alpha b_\beta + \ldots\ldots = a_\alpha B$

Puis : $a_1 B + a_2 B + a_3 B + \ldots\ldots + a_\alpha B + \ldots\ldots\ldots = AB$

La série à double entrée est donc convergente et sa somme est AB.

— Le théorème s'étend aux séries à termes imaginaires, à la condition qu'elles soient absolument convergentes. En effet, dans ce cas, la série à double entrée $|a_\alpha| \times |b_\beta|$ sera convergente et conséquemment la série à double entrée $a_\alpha b_\beta$ sera absolument convergente.

On pourra ranger ses termes dans un ordre linéaire quelconque ; la série ainsi formée sera aussi absolument convergente.

Rangeons-les dans l'ordre suivant, que nous connaissons déjà :

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + \ldots\ldots$$

Comme on peut remplacer autant de termes qu'on veut par

leur somme effectuée, la série précédente peut s'écrire:

$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots + C_n$

en posant: $\left\{\begin{array}{l} C_1 = a_1 b_1 \\ C_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ C_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ C_{n-1} = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 \end{array}\right.$

— Considérons les séries à double entrée dont le terme général est:

$u_{\alpha,\beta}$ On peut admettre que α, β sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. On pourra encore ranger les termes dans une suite linéaire infinie dans les 2 sens, et la série à double entrée sera convergente si la série linéaire est absolument convergente. [Supposons que les 2 séries:

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$

$a_{-1} + a_{-2} + a_{-3} + \ldots\ldots + a_{-n}$

soient convergentes, et soit $\sum_n a_n$ la somme de leurs sommes.]

Si la série linéaire: γ_n est absolument convergente, on démontrera que les ~~sommes~~ séries telles que $\sum_\beta u_{\alpha,\beta}$ qui représentent les files de termes d'indice α entre les indices β et $-\beta$, sont abs[olument] convergentes et ont une limite S_α pour $\beta = \pm\infty$. — Puis, on montrera que la série dont la somme est $\sum_\alpha S_\alpha$ est absolument convergente et a pour limite la somme de la série γ_n. Comme cette somme $\sum_\alpha S_\alpha$ a pour limite la somme de la série à double entrée pour $\alpha = \pm\infty$, on voit

que la série à double entrée a même somme que la série linéaire.
Une telle série $u_{\alpha,\beta}$ peut être considérée comme la réunion de 4 séries à double entrée, distribuées dans les 4 quadrants du plan, et dans chacune desquelles les indices ont respectivement le même signe.
— Ces propriétés s'étendraient aisément aux séries à triple, quadruple, ... entrée.
Par exemple, une série à triple entrée dont le terme général est $u_{\alpha,\beta,\gamma}$ pourra être représentée par un casier à 3 dimensions. On dira qu'elle est absolument convergente si la série linéaire formée des mêmes termes est absolument convergente. On le démontrera en formant successivement les sommes infinies

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha,\beta,\gamma} \qquad \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha,\beta,\gamma} \qquad \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\infty}\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} u_{\alpha,\beta,\gamma}$$

— Disons un mot des produits à multiple entrée.
Soit un produit à double entrée dont le facteur général est :

$$1 + u_{\alpha,\beta}$$

Si la série à double entrée dont le terme général est $u_{\alpha,\beta}$ est absolument convergente, on dira que le produit infini est absolument convergent.
On démontrerait pour les produits infinis des propositions analogues à celles qui concernent les séries.
On peut ranger les termes $u_{\alpha,\beta}$ en un tableau, de manière à avoir des suites linéaires composées de termes de même indice. On formera les produits infinis ;

$$\prod_{\beta=1}^{\beta=\infty}(1+u_{\alpha,\beta}) \qquad \text{puis} \qquad \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\prod_{\beta=1}^{\beta=\infty}(1+u_{\alpha,\beta})$$

Nous n'avons jusqu'ici considéré que les séries et produits infinis à termes constants, c.à.d. dont les termes ne dépendent que de leur indice et sont déterminés dès qu'on le connaît.

— Nous examinerons maintenant le cas où $u_1, u_2, \ldots u_n$ sont des fonctions d'une variable réelle ou imaginaire x, fonctions définies d'une façon univoque pour tous les points d'une certaine aire. Supposons que pour chacun de ces points la série : $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$ soit convergente. La somme sera une fonction de x définie pour tous les points de l'aire considérée.

Dire que la série est convergente pour toutes les valeurs de x comprises dans l'aire donnée, c'est dire que, si l'on se donne une valeur de x prise dans cette aire, et un nombre positif ε, on pourra trouver une valeur de n telle que pour tout $p \geqq n$ la somme R_p des termes au-delà du p^e est inférieure à ε en valeur absolue : $|R_p| < \varepsilon$.

Quand la valeur de x change, n change en général, et il peut arriver qu'au voisinage de certains points n croisse indéfiniment (pour une même valeur de ε.)

On dit qu'une série est <u>uniformément convergente</u> pour toutes les valeurs de x comprises dans une certaine aire, si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier n tel que, pour tout $p \geqq n$, on ait :

$|R_p| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'aire considérée.

Une telle série représente la fonction qui en est la somme avec une approximation régulière qu'il est facile d'évaluer; on conçoit donc que les séries de cette espèce offrent un intérêt particulier. Les séries les plus maniables sont évidemment les séries absolument et uniformément convergentes.

On pourra affirmer qu'une série est absolument et uniformément convergente pour tous les points d'une aire donnée, si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel que, sous la condition : $n' > n \geqq p$, on ait, pour toutes les valeurs de x prises dans l'aire donnée,

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \ldots\ldots\ldots + |u_{n'}| < \varepsilon.$$

En effet, si cette condition est vérifiée, 1° la série est absolument convergente, car la série $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots\ldots$ est convergente.

2° La série est uniformément convergente; en effet, l'inégalité

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \ldots\ldots + |u_{n'}| < \varepsilon$$

ayant lieu quel que soit n', si on fait croître n' indéfiniment, le 1er membre tendra vers R_n, et on aura : $|R_n| < \varepsilon$, sous la condition : $n \geqq p$.

Il y a un cas très-général où l'on peut reconnaître immé-

diatement qu'une série est absol^t et unif^t convergente : c'est lorsque l'on a une suite de nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n \ldots$ formant une série convergente et tels qu'on ait : $|u_n| \leqq a_n$ pour toutes les valeurs de x contenues dans l'aire.

1° La série est manifestement absol^t convergente pour toutes les valeurs de x considérées, en vertu du théorème connu.

2° Elle est aussi unif^t convergente : en effet, on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε un entier p tel que, à la condition $n \geqq p$, on ait :

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots\ldots\ldots < \varepsilon$$

On a donc à fortiori : $|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \ldots\ldots < \varepsilon$, c. q. f. d.

Théorème. Les séries dont les termes sont des fonctions de x continues pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur d'un contour simple, et uniformément convergentes pour ces mêmes valeurs, définissent des fonctions de x continues dans l'aire considérée.

En effet, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif η tel que, sous la condition $|h| < \eta$, on ait :

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

$f(x)$ étant la somme de la série ; et x, $(x+h)$ étant des valeurs comprises dans l'aire. — Soit S_n la somme des n premiers termes de la série et R_n

la somme du reste : $f(x) = S_n + R_n$.

La série étant uniformément convergente, on peut trouver un entier n tel que : $|R_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, pour les les valeurs de x.

D'autre part, les fonctions $u_1, u_2, \dots u_n$ étant continues et leur nombre étant limité, leur somme est continue. On peut donc avoir : $|S_n(x+h) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $|h| < \eta$.

Or : $f(x+h) - f(x) = S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x)$

Donc : $|f(x+h) - f(x)| \leq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| \leqq \varepsilon$.

— Une autre propriété essentielle de ces séries est la suivante :

Considérons dans l'aire A un arc de courbe allant de x_0 à x_1, que nous supposerons décrit par le point mobile :

$$x = \varphi(t) + i\psi(t)$$

φ et ψ étant des fonctions réelles et continues de la variable t entre t_0 et t_1. — La fonction définie par la somme de la série, $f(x)$, a pour intégrale le long de ce contour C :

$$\int_C f(x)\,dx$$

Or $f(x)$ a la forme : $f(x) = \Phi(t) + i\Psi(t)$

Φ et Ψ étant des fonctions réelles ; l'intégrale devient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\Phi(t) + i\Psi(t)\right)\left(\varphi'(t) + i\psi'(t)\right) dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\Phi(t)\varphi'(t) - \Psi(t)\psi'(t)\right) dt + i\int_{t_0}^{t_1} \left(\Phi(t)\psi'(t) + \Psi(t)\varphi'(t)\right) dt.$$

Ces 2 intégrales sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Cela posé, la série : $\int_C u_1 dx + \int_C u_2 dx + \int_C u_3 dx + \dots + \int_C u_n dx + \dots$ est convergente, et sa somme est :

$$\int_C f(x)\,dx$$

Posons, comme tout à l'heure : $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

S_n est une fonction continue de x, puisque c'est la somme d'un nombre limité de termes ; R_n est aussi une fonction continue, car c'est la somme d'une série unif.t convergente.

On a identiquement : $\int_C f(x)\,dx = \int_C S_n(x)\,dx + \int_C R_n(x)\,dx$

Or : $\int_C S_n(x)\,dx = \int_C u_1 dx + \int_C u_2 dx + \dots\dots + \int_C u_n dx$

Il suffit de prouver que $\int_C R_n(x)\,dx$ tend vers 0 quand n croît indéfiniment ; c.à.d. que le développement de $\int_C S_n(x)\,dx$ a pour limite $\int_C f(x)\,dx$ quand $n = \infty$.

Or on peut avoir, pour n suffisamment grand :

$|R_n(x)| < \varepsilon$ pour tous les points de l'aire et par suite de la courbe $x_0 x_1$. On a donc :

$$\int_C R_n(x)\,dx < \varepsilon S$$

S étant la longueur de ce contour. On peut donc prendre n assez grand pour que $\left|\int_C R_n(x)\,dx\right| < \varepsilon$

Théorie des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle ou imaginaire, dites : séries entières en x.

Soient : $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ des nombres réels ou imaginaires. La série : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots$ est une série entière en x qu'on désignera par $P(x)$.

1er théorème d'Abel. S'il existe une valeur x' de x telle que l'on ait, en désignant par A un nombre positif fixe, $|a_n x'^n| < A$ quel que soit n, la série est convergente pour toutes les valeurs de x inférieures en valeur absolue à x'. (Autre énoncé : Lorsque les modules de tous les termes de la série restent finis pour une valeur x', la série est conv. &a.)

— Soit r le module de x' ; prenons x tel que $|x| < r$. La série : $1 + \frac{x}{r} + \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^3}{r^3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{r^n} + \ldots\ldots$ sera absolument convergente, c.à.d. que la série

$$1 + \frac{|x|}{r} + \frac{|x|^2}{r^2} + \frac{|x|^3}{r^3} + \ldots\ldots + \frac{|x|^n}{r^n} + \ldots\ldots$$

est convergente : car c'est une progression géométrique dont la raison est plus petite que 1. Si l'on multiplie le terme général de cette série par le nombre positif $|a_n| r^n$, on formera une 2e série à termes positifs qui sera aussi convergente, et dont le terme général sera $|a_n x^n|$. Donc la série $a_n x^n$ est absolument convergente.

Ainsi, si l'on décrit de l'origine comme centre un cercle de rayon r, la série $P(x)$ sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur de ce cercle. Ce théorème ne nous apprend rien touchant les valeurs de x situées sur la circonférence.

— Supposons que la série $P(x)$ soit convergente pour la valeur x' de x. Le terme général $a_n x'^n$ tend vers 0 quand n croît indéfiniment. Il y aura donc sûrement un n. positif A tel que: $|a_n x'^n| < A$ pour toutes les valeurs de n.

D'où ce corollaire du théorème d'Abel:

— Si la série est convergente pour une certaine valeur de x, elle sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à celles-là en valeur absolue.

Si l'on suppose que la série $|a_0| + |a_1 x'| + |a_2 x'^2| + \dots\dots$ est convergente, on a, pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur ou égal au module de x',

$$|a_n x^n| \leq |a_n x'^n|$$

Dès lors, il est prouvé que la série $P(x)$ est abs.t et unif.t convergente pour toutes les valeurs de x satisfaisant l'inégalité:

$$|x| \leq |x'|$$

Donc si l'on décrit de l'origine comme centre une circonférence passant par le point x', la série sera abs.t et unif.t convergente

pour tous les points du cercle et de la circonférence. La somme est une fonction continue de x pour cette aire et pour son contour.

Dans le cas où l'on a simplement : $|a_n x'^n| < A$,
la série est abs^t convergente pour les points situés à l'intérieur de la circonférence qui passe par x'. Si l'on trace un cercle concentrique un peu plus petit, mais aussi voisin du 1er qu'on le voudra, la série sera abs^t et unif^t convergente pour tous les points de ce 2e cercle et de sa circonférence.

Cela posé, nous allons examiner les différents cas de convergence et de divergence.

Il peut arriver que la série soit convergente quel que soit x ; par ex : la série ; $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$
est absolument convergente pour toute valeur de x, c.à.d. dans tout le plan. Si l'on décrit un cercle de rayon quelconque autour de l'origine, la série est abs^t et unif^t convergente dans ce cercle et sur son contour, donc dans une partie quelconque du plan. La somme est ce qu'on appelle une <u>fonction transcendante entière</u> ; elle est continue dans tout le plan.

— Il peut se faire que la série soit divergente pour toute valeur de x, sauf pour $x = 0$; par ex :
$1 + 1x + 1.2x^2 + 1.2.3\,x^3 + \ldots\ldots\ldots + n!\,x^n + \ldots\ldots$

— Enfin une série peut être convergente pour certaines valeurs de x

et divergente pour d'autres. Or nous savons qu'elle est convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à ~~celle~~ en valeur absolue à celles qui la rendent convergente. Donc, si r est la plus grande des valeurs absolues de x qui la rendent convergente, elle sera convergente pour toutes les valeurs inférieures en valeur absolue à r, et divergente pour toutes les valeurs supérieures.

La quantité r est appelée le rayon de convergence de la série. En effet le cercle de rayon r ayant pour centre l'origine contient tous les points pour lesquels la série est abs^t convergente, et elle est divergente pour tous les points extérieurs à ce cercle. Sur la circonférence même, elle peut être divergente ou convergente; mais si elle est absolument convergente en un point de la circonférence, elle sera abs^t et unif^t convergente pour tous les points de la circonférence (et du cercle). — Nous allons passer en

v. p. 62. revue quelques exemples de ces différents cas.

— 1° Considérons la série; $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n + \ldots$

Pour $x = 1$, tous les termes sont égaux à 1, et restent inférieurs à un nombre positif quelconque supérieur à 1. Donc, en vertu du théorème d'Abel, la série est convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à 1. Elle est divergente pour le point $x = 1$, et aussi pour tous les points où $|x| = 1$. (points du cercle de rayon 1.)

En effet, posons $x = \cos\varphi + i \sin\varphi$

On a par la formule de Moivre :

$$x^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

x^n ne peut tendre vers 0, car son module $\sqrt{\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi}$ est constamment égal à 1.

— 2° La série : $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$

est convergente pour tout $x < 1$. Pour $x = 1$, elle est divergente ; mais pour $x = -1$, elle est convergente. On démontrerait qu'elle est convergente en tous les points de la circonférence de rayon 1, sauf pour $x = 1$.

— 3° La série : $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots\ldots$

a pour cercle de convergence le cercle de rayon 1 ; et comme elle est absolument convergente pour $x = 1$, elle sera abs[t] et unif[t] convergente pour tous les points de la circonférence.

— Remarque. Signalons un cas fréquent dans les applications.

Soit la série : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a^3 x^3 + \ldots\ldots$

dans laquelle le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers une limite ρ quand n augmente indéfiniment. Dans ce cas, le rayon de convergence est $\left|\frac{1}{\rho}\right|$. En effet, le rapport : $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|}$ tend vers $|\rho x|$ quand n croît indéfiniment.

Si $|x| < \left|\frac{1}{\rho}\right|$, on a $|\rho x| < 1$. Dans ce cas, la série est convergente.

Si $|x| > \left|\frac{1}{\rho}\right|$, le rapport tendant vers une limite supérieure à 1,

$a_{n+1} x^{n+1}$ ne peut décroître indéfiniment, donc la série diverge. Pour les valeurs de x dont le module est $\left|\frac{1}{\rho}\right|$ (points situés sur la circonférence) on ne peut rien dire de la série.

24c – **2e Théorème d'Abel.** Supposons que la série considérée soit convergente pour une valeur x' de x. D'après un corollaire du 1er théorème d'Abel, elle est uniformément et absolument convergente pour tous les points d'un cercle de rayon moindre que $|x'|$. Donc, pour tout point A situé sur la droite Ox' en deçà de x', la série est absᵗ et unifᵗ convergente. Cela posé, on va démontrer que la série est uniformément convergente pour tous les points de la droite Ox', y compris x'.

Autre énoncé; La somme de la série, quand x tend vers x' suivant le rayon Ox', a pour limite la valeur de la série au point x'. – C'est une conséquence de la propriété indiquée dans le 1er énoncé, car si l'on prouve le théorème la série sera une fonction continue de x le long du segment Ox', donc elle a pour limite sa valeur au point x' quand x s'approche indéfiniment de x'.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que la valeur $x' = 1$, et nous démontrerons le théorème pour ce cas particulier, en montrant qu'il implique tous les autres. En effet, si l'on pose : $x = x'\xi$, on transforme la série en une autre série:

$$a_0 + a_1 x'\xi + a_2 x'^2 \xi^2 + a_3 x'^3 \xi^3 + \ldots\ldots$$

entière en ξ, et convergente pour $\xi = 1$. D'ailleurs, comme la relation : $x = x'\xi$, définit une transformation par similitude par rapport à l'origine, quand x décrit le rayon Ox', ξ décrit le rayon 0_1.

Supposons donc que la série : $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ soit convergente ; la série : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$ sera uniformément convergente pour : $0 < |x| < 1$.

Cherchons la limite de la série : $a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots\ldots = R_n(x)$

Désignons par r_n la valeur du reste de la 1e série (a_n) limitée au $(n+1)^e$ terme : on a :

$$a_n = r_n - r_{n+1} \qquad a_{n+1} = r_{n+1} - r_{n+2} \quad \text{etc}$$

$$R_n(x) = x^n \left[(r_n - r_{n+1}) + (r_{n+1} - r_{n+2})x + (r_{n+2} - r_{n+3})x^2 + \ldots\ldots \right]$$

La quantité entre crochets est la différence entre les 2 séries :

$$r_n + r_{n+1} x + r_{n+2} x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n+1} + r_{n+2} x + r_{n+3} x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

uniformément convergentes, puisque r_{n+p} tend vers 0 quand p augmente indéfiniment. Cette différence peut se mettre sous la forme : $r_n - r_{n+1}(1-x) - r_{n+2}\, x(1-x) - r_{n+3}\, x^2(1-x) - \ldots\ldots$

$$= r_n - (1-x)\left(r_{n+1} + r_{n+2} x + r_{n+3} x^2 + \ldots\ldots\right)$$

Or si l'on se donne un nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ aussi petit qu'on voudra on peut fixer un entier p tel que, pour tout $n \geq p$,

on ait : $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dans ce cas, on aura pour tout $|x| < 1$,

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |1-x| \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}|x| + \frac{\varepsilon}{2}|x^2| + \frac{\varepsilon}{2}|x^3| + \dots \right)$$

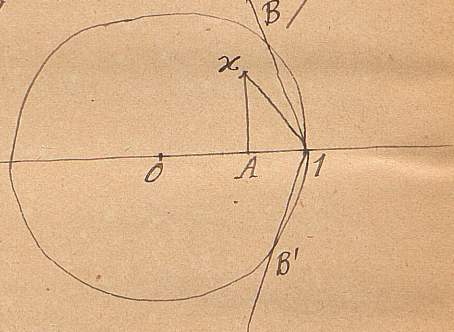
la somme entre parenthèses est une progression géométrique dont la raison est x ; donc : $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|1-x|}{1-|x|}$

Dans le cas où x est positif, $|x| = x$, on a :

$|R_n(x)| < \varepsilon$, pour toutes les valeurs de x appartenant au rayon 0_1, et inférieures à 1. Mais cela est encore vrai pour $x = 1$, car on a alors : $R_n(x) = r_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Il est donc établi que la série est unift convergente pour tout l'intervalle 0_1.

Soit maintenant le cercle de rayon 1 ; considérons un point x quelconque dans ce cercle ; $|1-x|$ est la droite qui le joint au p. 1. $(1-|x|)$ est la projection de cette droite sur l'axe des x. On voit que le rapport $\frac{|1-x|}{1-|x|}$ reste fini pour tout point intérieur au cercle, c.à.d. compris dans l'angle $B1B'$, plus petit que 2 droits. Cette démonstration géométrique ne vaut plus, en effet, pour le point x s'approchant indéfiniment de 1 suivant la circonférence.



__Application__ : On sait qu'on peut écrire le développement en série : $\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \dots$

pour x réel et plus petit que 1. On en conclut parfois à tort l'égalité : $\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$

Elle n'est légitime que lorsqu'on a démontré le 2e théorème d'Abel, c.à.d. quand on sait que la 1e série a pour limite la 2e quand x tend vers 1.

— Soient les séries : $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots\ldots$$
convergentes pour $x = 1$. Posons : $$A = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$
$$B = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots$$
Les 2 séries sont absolument convergentes pour tout $|x| < 1$.
Leur produit : $a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \ldots\ldots$ est convergent pourvu que $|x| < 1$. En effet, la série :
$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \ldots\ldots$$
est convergente, et sa somme est égale au produit AB. Or on l'obtient en faisant $x = 1$ dans le produit des 2 séries en x.
Soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ les sommes des 2 séries proposées. La 3e série aura une somme égale à $\varphi(x)\psi(x)$ pour toute valeur réelle de $|x| < 1$. Si l'on fait tendre x vers 1, en vertu du théorème d'Abel, $\varphi(x)$ tend vers A, $\psi(x)$ tend vers B, donc $\varphi(x)\psi(x)$ tend vers AB. — Cette proposition est une extension de la règle de Cauchy sur le produit des 2 séries convergentes.

Théorème Soit une série entière en x :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots$$

absolument convergente pour une certaine valeur de x dont le module est ρ. Elle sera absᵗ et unifᵗ convergente dans tout le cercle de rayon ρ. Supposons que sur la circonférence on ait :

$|P(x)| \leq A$ A étant un nombre positif quelconque.

On va démontrer qu'on doit avoir : $|a_n| \leq A\rho^{-n}$

Posons en effet : $x = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\frac{P(x)}{\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{a_0}{\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} + \frac{a_1}{\rho^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)} + \dots\dots$$

Les termes du 2e membre peuvent être considérés comme des fonctions de la variable réelle φ ; ils forment une série unifᵗ convergente pour les valeurs de φ : $0 < \varphi < 2\pi$.

Pour ces mêmes valeurs, tous les termes sont des fonctions continues de φ. En vertu du théorème qui permet d'intégrer une série unifᵗ convergente le long d'une courbe, nous pouvons intégrer cette série entre 0 et 2π. Or le 1er membre est en valeur absolue plus petit que $\frac{A}{\rho^n}$; donc l'intégrale de la série sera en valeur absolue plus petite que $\frac{2\pi A}{\rho^n}$.

Or dans cette intégrale entre 0 et 2π, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, $\sin n\varphi$ et $\cos n\varphi$ deviennent nuls ; il ne reste donc que le terme a_n dont l'intégrale est $2\pi a_n$; on a donc $|2\pi a_n| \leq \frac{2\pi A}{\rho^n}$

ou : $|a_n| \leq \frac{A}{\rho^n} = A\rho^{-n}$.

Cette proposition peut se déduire aussi de la formule de Cauchy :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Corollaire. Si une série $P(x)$ est convergente dans tout le plan (c'à d. représente une fonction transcendante entière) et si l'on se donne un nombre positif quelconque A, on peut lui faire correspondre un nombre positif B tel que, pour des valeurs de x convenables et de module supérieur à B, le module de $P(x)$ soit supérieur à A. — Autrement dit, une fonction transcendante entière ne peut, pour certaines valeurs de x, rester inférieure à un nombre positif A.

En effet, supposons que pour toutes les valeurs de x, $P(x)$ soit inférieur en valeur absolue à A. On aurait alors, pour une valeur quelconque $|x| = \rho$, $\quad |a_n| < \frac{A}{\rho^n}$

Or ρ est pris aussi grand qu'on le veut ; il faut donc que $a_n = 0$. Mais si $a_n \gtrless 0$, il faut que $|P(x)| > A$ pour certaines valeurs de $|x| > B$.

Remarque. Cette propriété n'est pas vraie pour toutes les valeurs de x supérieures en valeur absolue à B, mais seulement pour quelques-unes ; en quoi les séries entières en x diffèrent des polynômes entiers en x.

— Le théorème précédent a plusieurs conséquences importantes.

Considérons une série entière convergente dans un cercle de rayon r ; elle est unif^t convergente dans tous les cercles intérieurs et

concentriques à ce cercle; elle est donc une fonction continue de x.

Supposons $a_0 \gtrless 0$. Si on se donne un nombre positif quelconque ε, on pourra lui faire correspondre un nombre positif η tel que, si $|x| < \eta$, on ait: $|P(x) - a_0| < \varepsilon$.

En particulier, si $\varepsilon < |a_0|$, $P(x)$ ne peut s'annuler dans le cercle de rayon η. Donc lorsque le 1er terme (indépendant de x) n'est pas nul, on peut décrire autour de l'origine un cercle de rayon η où $P(x)$ n'a pas de racine.

Supposons maintenant les n premiers coefficients nuls, et $a_n \gtrless 0$. On peut écrire:

$$P(x) = x_n \left(a_n + a_{n+1}x + a_{n+2}x^2 + a_{n+3}x^3 + \ldots\ldots\right)$$

On pourra décrire autour de l'origine un petit cercle où la série entre parenthèses ne s'annule pas; $P(x)$ s'annulera pour n valeurs de x égales à 0.

S'il y a un arc de courbe aboutissant à l'origine et sur lequel $P(x)$ s'annule au voisinage de l'origine, la série est identiqt-nulle; $a_n = 0$. pour n quelconque.

Si 2 séries ont la même somme suivant un arc de courbe aboutissant à l'origine, elles sont identiques; car alors la série: $P(x) - Q_1(x)$ est identiquement nulle.

— Théorèmes généraux sur des séries ou produits infinis dont les termes sont des fonctions de x pouvant être elles-mêmes représentées par des séries entières en x.

Soit : $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$

une série dont chaque terme est la somme d'une série entière en x :

$$u_n = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + \ldots\ldots + a_{np}x^p + \ldots\ldots$$

Nous supposerons que la série à double entrée dont le terme général est : $a_{n,p}A^p$ A étant un nombre positif, est convergente, quand n et p prennent toutes les valeurs : $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Alors la série à double entrée dont le terme général est : $a_{n,p}x^p$ sera absolument convergente pour toutes les valeurs : $|x| \leq A$.

Dans ce cas, toutes les séries partielles qu'on obtient en fixant n et en faisant varier p, ou en fixant p et faisant varier n, sont convergentes. Ainsi la série ;

$$|a_{n0}| + |a_{n,1}A| + |a_{n,2}A^2| + |a_{n,3}A^3| + \ldots\ldots + |a_{n,p}A^p| + \ldots\ldots$$

est convergente ; par suite la série u_n est absᵗ convergente pour tout $|x| \leq A$. — Désignons par V_n la somme de la série $|a_{n0}| + |a_{np}A^p|$; la série ; $V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_n + \ldots$ doit être aussi convergente, et elle a pour somme la somme de la série à double entrée : $a_{n,p}A^p$

<u>Réciproquement</u>, si la série u_n reste convergente quand on remplace tous les coefficients par leurs modules et x par A, et si on appelle sa somme V'_n ; si la série : $V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_n + \ldots$

est convergente, la série à double entrée $a_{np} x^p$ sera convergente.
— Cela étant prouvé, il est clair que la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n + \dots$$

sera abs^t et unif^t convergente pour tout $|x| \leq A$.
En effet, on a alors : $|u_n| \leq V_n$

Or la série V_n, à termes constants et positifs, est convergente. — Ainsi la série u_n représente une fonction continue de x pour tout le cercle de rayon A : soit $\varphi(x)$.

Nous allons maintenant démontrer que la somme de cette série peut être représentée par une série entière abs^t et unif^t convergente dans le cercle de rayon A.

En effet, si l'on fait varier seulement p, on obtient la série partielle :

$$u_n = a_{n0} + a_{n1} x + a_{n2} x^2 + a_{n3} x^3 + \dots\dots + a_{np} x^p + \dots$$

La somme de ces séries est : $\varphi(x) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

Si l'on fait varier seulement n, on a :

$$a_{0p} x^p + a_{1p} x^p + a_{2p} x^p + \dots\dots = x^p (a_{0p} + a_{1p} + a_{2p} + \dots\dots)$$

La série entre parenthèses est convergente ; soit B_p sa somme.
La somme des séries de ce genre sera :

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots\dots = \varphi(x).$$

Ainsi la série proposée est transformée en une série entière en x pour toutes les valeurs : $|x| \leq A$.

Les coefficients B_p sont les limites de séries à termes constants

dont l'indice p est constant et dont l'indice n prend toutes les valeurs : 0, 1, 2, 3, ... La somme des $(n+1)$ premiers termes de B_p serait le coefficient de x^p dans la somme limitée $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Donc, pour former $\varphi(x)$ en série entière, on peut ajouter les $(n+1)$ premiers termes, et ordonner la somme suivant les puissances croissantes de x ; puis on fera croître n indéfiniment. Ce procédé est celui qu'on emploie pour les polynômes entiers en x, dont le nombre des termes est limité.

— Si on suppose seulement que les séries qui représentent u_n soient convergentes pour tout $|x| \leq A$, et si la série $\varphi(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$ est convergente pour les mêmes valeurs de x, on peut affirmer que, pour tout $|x| < A$, on peut remplacer $\varphi(x)$ par une série entière en x.

— Les produits infinis donnent lieu à un théorème tout à fait analogue, puisqu'un produit infini peut s'exprimer par une série équivalente.

Considérons le produit infini : $(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots$
Supposons que : $u_n = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \dots\dots + a_{np}x^p + \dots$
et que u_n reste convergent quand on remplace les coefficients par leurs modules et x par A. Soit V_n ce que devient alors u_n. Supposons que le produit infini : $(1+V_0)(1+V_1)(1+V_2)\dots\dots(1+V_n)\dots$ soit convergent. On va prouver que le produit proposé est absolument convergent pour tout $|x| \leq A$.

En effet, si l'on désigne par P_n le produit des $(n+1)$ premiers facteurs, on a : $P_{n+1} = P_n + P_n u_{n+1}$ d'où :

$$P_n = P_0 + P_0 u_1 + P_1 u_2 + P_2 u_3 + \ldots\ldots + P_{n-1} u_n$$

Cette série, indéfiniment prolongée, est la série équivalente au produit infini.

Dans le cas présent, cette série satisfait aux conditions du théorème précédent ; car le terme général $P_{n-1} u_n$ est convergent. En effet, P_{n-1} est le produit de n facteurs dont les 2es termes sont des séries entières en x abst. convergentes pour tout $|x| \leq A$ (on formera ce produit par la règle de Cauchy) donc $P_{n-1} u_n$ est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et convergente pour tout

$$|x| \leq A.$$

Supposons que dans toutes les séries u_n on remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par A, on formera ainsi les séries V_n. Posons : $Q_n = (1+V_0)(1+V_1)\ldots\ldots(1+V_n)$

Si dans P_n on remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par A, on aura une quantité positive qui ne pourra être supérieure à Q_n. — Si l'on effectue les mêmes substitutions dans $P_{n-1} u_n$, le résultat sera inférieur ou égal à $Q_{n-1} V_n$. Or on sait que la série :

$$Q_n = Q_0 + Q_0 V_1 + Q_1 V_2 + Q_2 V_3 + \ldots\ldots + Q_{n-1} V_n$$

est convergente : donc la série équivalente au produit proposé, et

conséquemment le produit ~~lui~~ infini lui-même est ~~infini~~ convergent pour $|x| \leq A$.

– On peut appliquer la règle précédemment donnée pour trouver les coefficients de la série entière en x équivalente au produit infini. On prendra les $(n+1)$ premiers termes, on en fera la somme qu'on ordonnera suivant les puissances croissantes de x, et on la prolongera indéfiniment. Or cette somme des $(n+1)$ premiers termes de la série est équivalente au produit des $(n+1)$ premiers facteurs du produit; on peut donc, par la règle de sommation des séries, effectuer le produit des $(n+1)$ premiers facteurs, puis le prolonger indéfiniment.

Nous allons seulement chercher à déterminer le terme indépendant de x et le coefficient de x.

Le terme indépendant est: $(1+a_{0,0})(1+a_{1,0})(1+a_{2,0})\ldots\ldots(1+a_{n,0})$

c.à.d. un produit infini à termes constants.

Le coefficient de x est le même que dans le produit à termes limités:

$$(1+a_{0,0}+a_{0,1}x)(1+a_{1,0}+a_{1,1}x)\ldots\ldots(1+a_{n,0}+a_{n,1}x)$$

c.à.d.:
$$\frac{a_{0,1}}{1+a_{0,0}}+\frac{a_{1,1}}{1+a_{1,0}}+\frac{a_{2,1}}{1+a_{2,0}}+\ldots\ldots+\frac{a_{n,1}}{1+a_{n,0}}$$

Donc, dans le produit infini ~~converti~~ développé et ordonné suivant les puissances croissantes de x: $B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots\ldots$

on a: $B_0=\prod_{n=0}^{n=\infty}(1+a_{n,0})$ $\quad B_1=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a_{n,1}}{1+a_{n,0}}$

Cette dernière série est absolument convergente

Appliquons aux séries entières le théorème général que nous venons de démontrer. Soit la série :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots\dots + a_n x^n + \dots\dots\dots$$

Supposons que cette série soit convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon R. Considérons une valeur de x située à l'intérieur de ce cercle ; posons : $|x| = X$. Soit h une variable réelle ou imaginaire, telle que : $|h| \leq H < R - X$. On a : $|x+h| < R$ de sorte que $P(x)$ est encore absolument convergent pour la valeur $(x+h)$; on peut écrire :

$$P(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \dots\dots\dots + a_n(x+h)^n + \dots\dots$$

Considérons x comme fixe et h comme variable. Cette série est absolument convergente pour tout $|h| < H$, car chaque terme est une série convergente, ou plutôt un polynôme limité. Dans son développement remplaçons tous les coefficients par leurs valeurs absolues et h par H. C'est remplacer (de h) a_n par $|a_n|$, x par X, et h par H.

On a évidemment : $|a_n(x+h)^n| \leq |a_n|(X+H)^n$

Cette nouvelle série : $|a_0| + |a_1|(X+H) + |a_2|(X+H)^2 + \dots\dots$

est convergente, ~~est~~ puisque : $X + H < R$.

Si l'on en développe les termes et qu'on ordonne suivant les puissances croissantes de H, on obtiendra une série à double entrée dont le terme général est : $\dfrac{1.2.3.\dots\dots n}{1.2.3\dots p.1.2.3\dots(n-p)} X^p H^{n-p}$

On calculera les coefficients des puissances successives de H comme il a été indiqué plus haut. — Dans le développement correspondant de $P(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h, le terme indépendant de h sera : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots = P(x)$.

Le coefficient de $\frac{h}{1}$ sera : $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots = P'(x)$.

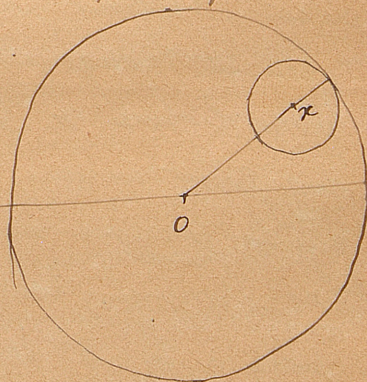
Le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ sera : $1.2 a_2 + 2.3 a_3 x + 3.4 a_4 x^2 + \ldots\ldots = P''(x)$.

etc. de sorte qu'on aura le développement :

$$P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1} P'(x) + \frac{h^2}{1.2} P''(x) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} P^n(x) + \ldots$$

Toutes les séries $P_n(x)$ étant absolument convergentes pour les valeurs de x considérées — La formule précédente est d'ailleurs valable pour tout $|h| < R - X$.

Géométriquement, $(R-X)$ est représenté par la partie du rayon Ox comprise entre x et la circ.



Les points $(x+h)$ auxquels s'applique la formule précédente sont situés à l'intérieur d'un cercle ayant le p. x pour centre et tangent intérieurement au cercle O (c.à.d. ayant pour rayon $(R-X)$ —

Corollaire — La fonction $P(x)$ admet des dérivées finies d'ordre quelconque à l'intérieur du cercle de convergence ; en effet on a :

$$\frac{P(x+h)-P(x)}{h} = P'(x) + \frac{h}{1.2}P''(x) + \dots\dots$$

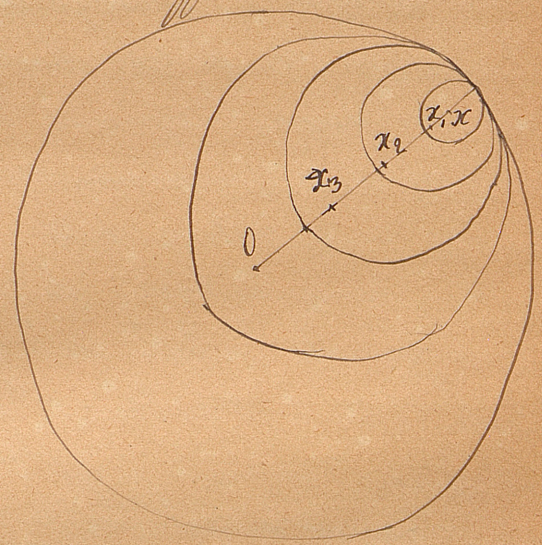
ce qui prouve que le rapport qui figure au 1er membre a pour limite $P'(x)$ quand h tend vers 0. Or cette limite est par définition la dérivée de $P(x)$, fonction d'une variable imaginaire. On prouverait de même que les dérivées successives sont $P''(x)$, $P'''(x)$, ... $P^n(x)$.....
Il y a donc des dérivées de tous les ordres, et la formule précédente en donne l'expression en séries entières absolument convergentes à l'intérieur du cercle de convergence. On voit que ces séries entières en x s'obtiennent en prenant les dérivées terme par terme de la série $P(x)$.

La formule fondamentale que nous venons d'établir permet d'étendre à un point quelconque situé à l'intérieur du cercle de convergence certaines propriétés établies seulement pour le centre, qui est l'origine.

Si pour le point x la fonction $P(x)$ n'est pas nulle, on pourra décrire de ce point comme centre un cercle de rayon assez petit pour que la fonction ne s'annule pour aucun point de ce cercle. Si $P(x)$ s'annule pour le point x ainsi que ses dérivées successives jusqu'à la n^e exclusivement, elle aura un zéro d'ordre n en x, et on pourra décrire autour de ce point un cercle de rayon assez petit pour que la fonction ne s'y annule pas en dehors du centre.

Examinons si toutes les dérivées de $P(x)$ peuvent s'annuler pour

un point du cercle de convergence. Comme la formule fondamentale s'applique à tout point $(x+h)$ sous la condition $|h| \leq H$, on aurait : $P(x+h) = P(x)$
c.à.d. que la fonction serait constante dans tout le cercle (x) de rayon $(R-X.)$ — Si ce cercle comprend l'origine, toutes les dérivées seront nulles à l'origine, donc tous les coefficients de x seraient nuls — Si le cercle n'enferme pas l'origine, on prendra pour nouveau centre un point x_1 contenu dans le petit cercle, puis s'il le faut un point x_2 contenu dans ce nouveau cercle et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on enferme l'origine dans un de ces cercles ce qui a lieu après un nombre limité d'opérations. On prouverait ainsi de proche en proche que les dérivées successives de $P(x)$ doivent être toutes nulles pour $x = 0$; donc $P(x)$ est identiquement nulle



— Corollaires. Si $P(x)$ est nulle pour tous les points d'une courbe aboutissant au point x, elle est identiquement nulle
— Si 2 fonctions développées en séries entières en x sont égales pour tous les points d'une courbe contenue dans leurs cercles de convergence elles sont identiques.
— On a vu que toutes les dérivées de $P(x)$ sont des séries absolument convergentes

dans le cercle de convergence de $P(x)$. On va prouver maintenant qu'elles ne peuvent être convergentes en dehors de ce cercle.

Soit en effet : $|x'| > R$ — Si le terme général de $P'(x)$: $na_n x'^{n-1}$ tend vers 0, $na_n x'^n$ aussi tend vers 0, et à fortiori $a_n x'^n$. Donc $P(x)$ serait convergente pour des points extérieurs au cercle de convergence, ce qui est absurde. Il est donc démontré que toutes les dérivées ont même cercle de convergence que $P(x)$.

Sur la circonférence même, les dérivées peuvent être convergentes sans que la série le soit, ou inversement. Par exemple, la série :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\ldots$$

est convergente pour $x = -1$, mais sa dérivée première ne l'est pas pour la même valeur.

— Problème de la continuation des séries. Soit la série :

$$P(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Le point x_0 joue le rôle d'origine ; la série est par hypothèse convergente dans un cercle C_0 qui a pour centre le point x_0.

Considérons un point de ce cercle, soit x_1. Posons :

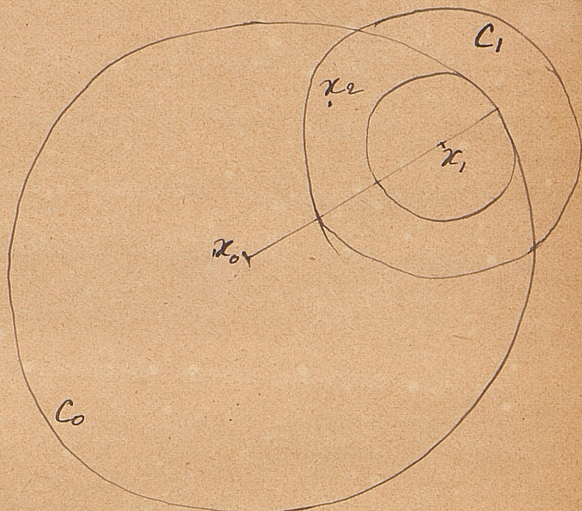
$$x = x_1 + h, \quad \text{ou :} \quad x - x_0 = x_1 - x_0 + (x - x_1)$$

Appliquons la formule fondamentale à cette série :

$$P(x - x_0) = P(x_1 - x_0) + \frac{x - x_1}{1} P'(x_1 - x_0) + \frac{(x - x_1)^2}{1.2} P''(x_1 - x_0) + \ldots\ldots$$

Nous remplaçons ainsi la série $P(x - x_0)$ ordonnée suivant les

puissances de $(x-x_0)$ par une série ordonnée suivant les puissances de $(x-x_1)$; ~~qui est convergente~~ et cette substitution est valable pour tous les points situés dans le cercle de centre x_1 et tangent intérieurement au cercle C_0. Or il se peut que cette nouvelle série ait un cercle de convergence C_1 qui dépasse C_0. La fonction $P(x-x_0)$ n'est définie que dans C_0 ; la fonction $P(x-x_1)$ est identique à la précédente, d'abord pour tous les points du cercle de centre x_1 tangent à C_0, puis pour tous les points communs aux 2 cercles C_0, C_1 (On relierait en effet un point quelconque x_2 de l'aire commune aux 2 cercles au point x_1 par une série de cercles tangents intérieurement à C_0, comme ci-dessus.) — Or la série $P(x-x_1)$ définit une fonction continue de x dans tout C_1 ; elle peut donc servir à <u>continuer</u> la fonction $P(x-x_0)$ en dehors de C_0, puisqu'elle se confond avec elle dans C_0.



On conçoit que la fonction $P(x-x_1)$ définie dans C_1 puisse être continuée à son tour en dehors de ce cercle par une 3e série, et ainsi de suite ; il nous suffit d'avoir indiqué le principe de cette théorie —

Nous pouvons étendre la notion de dérivée aux séries dont les termes sont des séries entières en x.

Considérons une fonction $\varphi(x)$ définie par la série:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

dont les termes sont des séries entières en x:

$$u_n = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + \ldots\ldots + a_{np}x^p + \ldots\ldots$$

Supposons que les conditions du théorème soient vérifiées, c.à.d. que, A étant un nombre positif au moins égal à la plus grande des valeurs absolues des coefficients a_n, la série u_n doit rester convergente si l'on y remplace x par $|x|$ et tous les a_n par A; et si elle a pour somme V_n, la série: $V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$ doit être convergente.

Cela posé, la fonction $\varphi(x)$ est définie pour tous les points d'un cercle C. Elle peut être ordonnée suivant les puissances entières de x; c'est une série entière en x. Elle admet donc des dérivées de tous les ordres dans le cercle C, et ces dérivées peuvent s'obtenir en prenant les dérivées terme par terme dans la série $\varphi(x)$; on écrira: $\varphi'(x) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$ et ainsi de suite pour les dérivées successives —

Posons: $|x| = X \qquad |h| \leq H < A - X$

On a alors: $|x+h| < A$, ce qui permet d'écrire l'égalité;

$$\varphi(x+h) = u_0(x+h) + u_1(x+h) + u_2(x+h) + \ldots\ldots + u_n(x+h) + \ldots\ldots$$

Considérons un terme quelconque de la série ~~$u_n(x+h)$~~ précédente.
Puisque $u_n(x)$ est une série entière en x convergente dans tout le cercle C, on a :

$$u_n(x+h) = u_n + \frac{h}{1} u'_n + \frac{h^2}{1.2} u''_n + \dots\dots \quad \text{pour tout } |h| \leq H.$$

En outre, il est aisé de voir que si l'on remplace dans le développement de $u_n(x+h)$ tous les termes $u_n, u'_n, u''_n, \dots$ par leurs valeurs absolues, et h par H, la série précédente reste convergente.
Désignons en effet par $v_n(x)$ la série qu'on obtient en remplaçant dans $u_n(x)$ tous les coefficients par leurs valeurs absolues :
On a : $|u_n(x)| \leq v_n(X)$ Donc : $|u'_n(x)| \leq v'_n(X)$
et de même pour les dérivées suivantes. Si dans le développement de $u_n(x+h)$ on remplace tous les termes par leurs valeurs absolues et h par H, on aura un résultat moindre que

$$v_n(X) + \frac{H}{1} v'_n(X) + \frac{H^2}{1.2} v''_n(X) + \dots\dots = v_n(X+H)$$

Or : $v_n(X+H) < v_n(A)$, car la série $v_n(x)$ a tous ses termes positifs, et on a posé : $X+H < A$. D'autre part : $v_n(A) = V_n$, donc le résultat est moindre que V_n.
Or la série : $V_0 + V_1 + V_2 + \dots\dots$ a tous ses termes positifs, donc la série : $u_0(x+h) + u_1(x+h) + u_2(x+h) + \dots\dots$ est convergente, et satisfait aux conditions d'existence des dérivées, à savoir : pour tout $|h| \leq H$, ses termes sont des séries convergentes, et si dans ces séries on remplace tous les coefficients par leurs valeurs

absolues et h par H, on obtient des séries convergentes. On peut donc ordonner la série $\varphi(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h : On écrira :

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \dots\dots\dots$$

en posant : $\varphi'(x) = u'_0 + u'_1 + u'_2 + u'_3 + \dots\dots$

ou en général : $\varphi^{(n)}(x) = u_0^{(n)} + u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + u_3^{(n)} + \dots\dots\dots$

D'où l'on conclut que les séries de cette espèce peuvent aussi se différentier terme par terme.

– Il en est de même des produits infinis de la forme :

$$P(x) = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\dots\dots\dots(1+u_n)(\dots\dots\dots$$

sous les mêmes conditions imposées à $u_0, u_1, u_2 \dots\dots u_n \dots\dots$

On pourra aussi écrire :

$$P(x+h) = \left(1+u_0[x+h]\right)\left(1+u_1[x+h]\right)\left(1+u_2[x+h]\right)\dots\dots\dots$$

en mettant dans les fonctions u_n la variable en évidence.

Quand on considère les facteurs de ce 2e produit comme des fonctions de h, on a un produit infini dont tous les termes sont des séries entières en h, et qui par suite peut être ordonné suivant les puissances croissantes de h. Le terme indépendant de h sera :

$$(1+u_0(x))(1+u_1(x))(1+u_2(x))\dots\dots\dots\dots = P(x)$$

On verra de même que le coefficient de h sera $P'(x)$, dérivée prise terme à terme ; le rapport de ce coefficient au terme indépendant sera :

$$\frac{u'_0(x)}{1+u_0(x)} \times \frac{u'_1(x)}{1+u_1(x)} \times \frac{u'_2(x)}{1+u_2(x)} \times \dots\dots\dots = \frac{P'(x)}{P(x)}$$

d'où l'on conclut que la dérivée logarithmique d'un produit infini se prend comme la dérivée logarithmique d'un produit limité.

26e

Fonctions transcendantes de variables imaginaires.

La plus importante des fonctions transcendantes est :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

série convergente dans tout le plan. On sait que toutes les dérivées sont égales à la fonction elle-même.

<u>Théorème</u>. L'expression : $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$

a pour limite la somme de la série précédente quand m croît indéfiniment.

On prouve d'abord cette proposition pour x réel, m entier et positif. On a par la formule du binôme :

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}x^3 + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{m}\right)}{1.2.3\ldots p}x^p + \cdots$$

Les numérateurs des coefficients de x vont en augmentant quand m croît, et restent inférieurs à 1. Les termes de ce développement sont respectivement moindres que ceux de la série :

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

En outre, il augmente constamment quand m augmente ; donc il a une limite inférieure ou au plus égale à $\varphi(x)$.

Soit p un entier quelconque fini et plus petit que m. Considérons les $(p+1)$ premiers termes du développement de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ —

Quand m augmente indéfiniment, ces termes ont pour limites respectives les $(p+1)$ premiers termes de la série $\varphi(x)$; d'ailleurs $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ est plus grand que la somme de ses $(p+1)$ premiers termes ; donc la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ est supérieure à la somme des $(p+1)$ premiers termes de $\varphi(x)$, et cela quel que soit p ; donc elle est égale à $\varphi(x)$.

On étend ensuite ce théorème au cas où x est négatif ou imaginaire. Formons la différence : $\varphi^x - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. Le terme général du développement est : $\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{p}{m}\right)\right]\frac{x^p}{p!}$

Ce développement a tous ses coefficients réels et positifs, donc il ne peut qu'augmenter si on y remplace x par sa valeur absolue ρ.

$$\left|\varphi(x)-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right| \leq \varphi(\rho)-\left(1+\frac{\rho}{m}\right)^m$$

Or le 2e membre tend vers 0 quand m augmente indéfiniment ; il en est de même du 1er, puisqu'il est essentiellement positif ce qui prouve que $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a pour limite $\varphi(x)$.

— La série $\varphi(x)$, quand x est réel, a pour limite e^x. Quand x est imaginaire, la somme de cette série est par définition e^x.

La règle de la multiplication des séries, appliquée au produit : $\varphi(x)\,\varphi(y)$ montre qu'on a : $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$

On peut donc écrire, pour x réel ou imaginaire ;

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

Dans le cas où $x+y=0$, on a :

$$e^x \times e^{-x} = 1.$$

Ce qui montre que e^x ne s'annule pour aucune valeur réelle ou imaginaire de x.

Si l'on remplace x par xi, on aura le développement :

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots$$

$$+ i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\ldots\right.$$

x peut d'ailleurs être réel ou imaginaire.

Quand x est réel, ces 2 séries en lesquelles se décompose le développement de e^{xi} représentent respectivement $\cos x$ et $\sin x$; elles peuvent servir à définir ces fonctions en dehors de toute considération géométrique. Comme elles sont convergentes dans tout le plan, elles seront <u>par définition</u> $\cos x$ et $\sin x$ quel que soit x.

On a donc : $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ $\qquad e^{-xi} = \cos x - i \sin x$

d'où : $\cos x = \dfrac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ $\qquad \sin x = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$

Si l'on compare ces formules à celles du sinus et du cosinus hyperboliques : $\operatorname{Ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad \operatorname{Sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

on voit que : $\operatorname{Ch} x = \cos xi$ $\qquad \operatorname{Sh} x = -\dfrac{\sin xi}{i}$

Les formules d'addition des sinus et cosinus établies pour l'argument réel sont encore vraies pour des arguments imaginaires. Elles se déduisent des formules précédentes :

$$\cos(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} = \frac{e^{ia}.e^{ib} + e^{-ia}.e^{-ib}}{2}$$

$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

$= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$

Les formules de périodicité se déduisent aisément des formules d'addition et des valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ pour les valeurs de x : π, $\frac{\pi}{2}$, $k\pi$, $2k\pi$.

On étend ainsi toutes les formules de trigonométrie aux fonctions analytiques $\sin x$, $\cos x$, définies pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable. — On a par exemple :

$e^{\pi i} = -1 \qquad e^{2\pi i} = +1 \qquad e^{x+2\pi i} = e^x \cdot e^{2\pi i} = e^x$

ce qui montre que la période de la fonction e^x est $2i\pi$.

— La fonction e^x étant ainsi définie pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de x, passons à la définition de la fonction inverse, qu'on désigne par $\log x$. Étant donné x, cherchons y tel que : $e^y = x$.

Soit : $y = a + bi \qquad e^y = e^a \cdot e^{bi} \qquad e^{bi} = \cos b + i\sin b$

e^{bi} est une quantité imaginaire de module 1 et d'argument b.

Posons : $x = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}$ Il faut qu'on ait :

$x = e^a \cdot e^{bi}$ d'où : $\rho = e^a \qquad b = \alpha + 2k\pi$.

Donc : $\log x = \log\rho + i(\alpha + 2k\pi)$

Ainsi toutes les valeurs du logarithme forment une progression arithmétique dont la raison est $2i\pi$.

Si l'on suppose déterminé l'angle α, on aura d'une manière

également déterminé ; $\log x = \log \rho + i\alpha$

La valeur du logarithme sera donc déterminée dans les mêmes conditions que celle de l'argument de x.

Nous avons déjà étudié la fonction $\log x = \log \rho + i\alpha$ et prouvé l'existence de sa dérivée. On pourrait l'établir au moyen du théorème des fonctions inverses, qui s'applique à celle-ci, pourvu qu'elle soit complètement définie. Cette dérivée doit être :

$$\frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Pour définir d'une manière univoque et continue l'argument de x, on prendra pour coupure le demi-axe des x négatifs, et on conviendra de prendre $\alpha = 0$ pour tout x réel positif, de sorte que $\log x = \log \rho$, c.à.d. le logarithme arithmétique de x.

Dans ces conditions, le logarithme de x est déterminé pour tous les points du plan sauf ceux de la coupure (x réel négatif); sa partie réelle est le logarithme de son module, et sa partie imaginaire est comprise entre $+\pi i$ et $-\pi i$. Cette valeur ainsi définie s'appellera la détermination principale de la fonction.

Considérons la fonction : $\log(1+x)$ pour $|x| < 1$.

L'argument de $(1+x)$ sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ sous certaines conventions. Ce sera une fonction définie et continue dans l'intérieur du cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, et notamment pour les valeurs réelles de x comprises entre -1 et $+1$; sa détermination principale coïncide

d'ailleurs pour ces valeurs avec la valeur arithmétique de $\log(1+x)$.
On sait qu'on a, pour ces valeurs :

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots$$

On pourrait établir cette série pour x imaginaire comme pour x réel, en appliquant la formule de Taylor généralisée. D'ailleurs, si $\log(1+x)$ peut être développé en série dans le cercle de rayon 1, ce ne peut être que par la série précédente, car ~~elle doit~~ cette fonction doit lui être identique pour les valeurs réelles de x.

— Passons à la fonction x^m ; ce sera par définition :

$$e^{m \log x}$$

Si x est réel et positif et si m est réel, et qu'on adopte pour détermination principale de $\log x$ sa valeur arithmétique, $e^{m \log x}$ est alors égal à x^m, quantité réelle.

Dans tous les cas, x^m sera défini dans les mêmes conditions que $\log x$, c.à.d. que l'argument de x. Prenons sa dérivée par la règle des fonctions de fonctions ; elle est égale à :

$$e^{m \log x} \times \frac{m}{x} = \frac{m x^m}{x} = m x^{m-1} = m e^{(m-1) \log x}$$

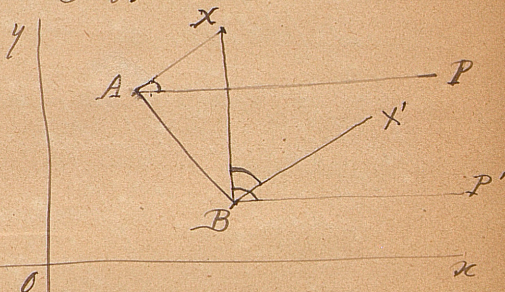
De même, pourvu que $|x| < 1$, l'argument de $(1+x)$ est pleinement défini quand on l'assujettit à rester compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. On a : $(1+x)^m = e^{m \log(1+x)}$

la partie imaginaire du logarithme étant comprise entre $+\frac{\pi i}{2}$ et $-\frac{\pi i}{2}$.

On peut appliquer la formule de Taylor généralisée par M. Darboux pour retrouver la formule du binôme pour toutes les valeurs

réelles et imaginaires de x et de m.

— Considérons encore la fonction : $\log \frac{x-a}{x-b}$.
Figurons les quantités a, b, x, par les points A, B, X.
La fonction est définie en même temps que l'argument de $\frac{x-a}{x-b}$.
On peut prendre pour valeur de cet argument la différence des arguments de $(x-a)$ et de $(x-b)$. Si l'on mène comme coupure la droite AB prolongée au-delà de B, les arguments seront entièrement définis si l'on assujettit X à ne pas traverser cette coupure, et si l'on se donne la valeur de ces arguments pour un point quelconque non situé sur la coupure. — Menons AP parallèle à Ox ; l'argument de $(x-a)$ est $P\hat{A}X$ décrit sans traverser la coupure, de P en X.



Menons BP' parallèle à Ox ; l'argument de $(x-b)$ est $P'BX$ décrit de même. L'argument de $\frac{x-a}{x-b}$ sera la différence de ces 2 angles, c.à.d. l'angle $X\hat{B}X'$ mesuré en faisant tourner une demi-droite mobile de BX à BX' parallèle à AX, sans traverser la coupure. Cet angle est moindre que π, car il est égal à l'angle $B\hat{X}A$ (décrit de B en A) et de même sens. On peut donc prendre pour argument — $A\hat{X}B$ (décrit de A en B.)
On adoptera cette ~~définition~~ détermination pour l'argument du point X tant qu'il ne traversera pas la coupure. On peut d'ailleurs supprimer

le prolongement de AB et ne conserver comme coupure que le segment AB. La fonction : $\log \frac{x-a}{x-b}$ sera donc définie pour tous les points du plan, sauf ceux du segment AB.

Son expression sera : $\log \frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} + i\,\widehat{BXA}$.

Pour 2 points situés de part et d'autre de AB, les arguments BXA diffèrent très-peu de $+\pi, -\pi$, dont la partie imaginaire du log diffère à peu près de $2i\pi$. Ainsi, quand X traverse la coupure le logarithme varie de $2i\pi$.

— Définition des fonctions circulaires inverses.

Soit : $z = \arcsin x$ On doit avoir : $x = \sin z$

$$x = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \qquad e^{zi} - e^{-zi} = 2ix \qquad e^{2zi} - 2ix\,e^{zi} - 1 = 0.$$

$$e^{zi} = ix \pm \sqrt{1-x^2} \qquad \text{d'où ; } z = \frac{1}{i}\log\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)$$

Cette expression comporte deux indéterminations, celle du radical et celle du logarithme. On pourra définir sans ambiguïté la fonction z par des conventions convenables. Et d'abord, les 2 quantités $\left(ix \pm \sqrt{1-x^2}\right)$ ne s'annulent jamais, car elles sont finies et leur produit est égal à -1. Donc, si l'on fait décrire ~~...~~ à X une courbe quelconque ne passant ni par $+1$ ni par -1, le logarithme ne passera pas par 0 et n'éprouvera aucune discontinuité. On fixera d'abord le sens du radical $\sqrt{1-x^2}$, qui dépend des arguments de $(1+x)$ et de $(1-x)$; une fois ces arguments déterminés, ils varieront d'une manière

continue, pourvu que X ne passe ni par $+1$ ni par -1: on pourra donc suivre le radical d'une façon continue. Supposons en outre qu'on ait fixé au point de départ l'argument de

$(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ Puisque cette quantité ne s'annule pas le long de la courbe décrite par X, on arrivera au bout de la courbe avec une valeur déterminée du logarithme sans solution de continuité.

Il s'agit maintenant de préciser: et d'abord, il faut définir $\sqrt{1-x^2}$. Il est naturel de prendre pour ~~la valeur~~ détermination principale de cette racine, pour x réel compris entre -1 et $+1$, sa valeur arithmétique. Si l'on suit X le long d'une courbe partant d'un point réel compris dans cet intervalle et ne passant ni par $+1$ ni par -1, le logarithme sera défini par continuité le long de cette courbe. Soient A, A' les 2 points $+1$, et -1; adoptons pour coupures l'axe des x au-delà de ces 2 points. La racine est ainsi entièrement définie, en dehors des coupures, pour tous les points du plan. Quand on se donne la valeur de x, on sait trouver les 2 valeurs algébriques du radical; reste à savoir laquelle on doit choisir.

En général, quand on a $\sqrt{A+Bi} = X + Yi$,

on sait que: $A = X^2 - Y^2 \qquad B = 2XY$.

Pour que X soit nul, il faut que B soit nul, et que A soit négatif. — Posons donc $x = a + bi$. $1 - x^2 = 1 - a^2 + b^2 - 2abi$.

La partie réelle de $\sqrt{1-x^2}$ ne s'annule que si $b = 0$ et $|a| > 1$, c.à.d. si x est sur l'une des coupures. Donc

si l'on assujettit $\sqrt{1-x^2}$ à varier d'une façon continue, sans que x passe par les coupures, la partie réelle ne pourra changer de signe. Si de plus on prend pour détermination principale la valeur arithmétique de $\sqrt{1-x^2}$ sur AA', il faudra prendre dans tout le reste du plan celle des 2 valeurs dont la partie réelle est positive.

Chacune des 2 quantités $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ étant ainsi définie, la partie réelle du logarithme sera parfaitement définie, puisque c'est le logarithme de la valeur absolue de $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$. Reste à considérer l'argument, qui forme la partie imaginaire. Si l'on assujettit x à varier d'une façon continue, les arguments des 2 quantités $(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ varieront de même; et comme le produit de ces 2 quantités est égal à -1, la somme de leurs arguments est égale à $(2k+1)\pi$. Si l'on choisit les valeurs de ces arguments de manière que leur somme soit égale en un point à π, comme cette somme est elle-même continue elle sera partout égale à π.

Supposons x réel et compris entre $+1$ et -1; il y a un angle φ compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, et tel qu'on ait:

$$x = \sin\varphi \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos\varphi$$

Cet angle φ est $\operatorname{arc\,sin} x$, au sens géométrique. On a:

$$ix + \sqrt{1-x^2} = i\sin\varphi + \cos\varphi$$
$$ix - \sqrt{1-x^2} = i\sin\varphi - \cos\varphi$$

On peut prendre φ pour argument de la 1re quantité, et

$(\pi - \varphi)$ pour argument de la 2e. Leur somme est alors égale à π, et elle sera constamment égale à π dans tout le plan.

Supposons maintenant x au-dessous de l'axe des quantités réelles, c.à.d. $b < 0$. La partie réelle de $\sqrt{1-x^2}$ est positive; donc la partie réelle de $(ix + \sqrt{1-x^2})$ est aussi positive. Un de ses arguments est donc compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, comme quand x est sur AA'. L'argument de $(ix - \sqrt{1-x^2})$ est également déterminé; il est compris entre $\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, c.à.d. entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Supposons, en second lieu, x situé au-dessus de l'axe Ox; c.à.d. $b > 0$. La partie réelle de ix sera négative, celle de $\sqrt{1-x^2}$ ~~aussi~~ positive; donc la partie réelle de $(ix - \sqrt{1-x^2})$ est négative. Pour conserver la continuité d'un côté à l'autre de AA' et avec AA', il faudra prendre pour argument de cette quantité la valeur comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. L'argument de $(ix + \sqrt{1-x^2})$ sera alors compris entre $\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right)$ c.à.d. entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. — Donc, où que soit le point x, on devra prendre pour l'argument de $(ix + \sqrt{1-x^2})$ la valeur comprise entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, et pour celui de $(ix - \sqrt{1-x^2})$ la valeur comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Dès lors, la valeur de $z = \frac{1}{i}\log(ix \pm \sqrt{1-x^2})$ sera parfaitement déterminée; sa partie réelle (correspondant à la partie imaginaire du log) sera comprise

entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ pour la 1e solution, entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ pour la 2e.

Il existe donc une fonction continue : $\arcsin x$, entièrement définie dans tout le plan coupé par cette condition que x soit le sinus de cet arc et telle que cet arc soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$; il en existe une autre, définie dans les mêmes conditions, et égale à $\pi - \arcsin x$; son sinus est encore x, et elle est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

La dérivée de l'une et l'autre fonction est encore $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ comme pour x réel, $\sqrt{1-x^2}$ étant pris de manière que sa partie réelle soit positive.

En effet, si l'on calcule cette dérivée, on trouve :

$$\frac{1}{i}\left(\frac{i - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{ix+\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1+\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}}{ix+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

– La fonction $\arccos x$ se définirait d'une manière analogue.

– Étudions encore la fonction : $z = \operatorname{arc\,tg} x$. On doit avoir :

$$x = \operatorname{tang} z = \frac{1}{i} \times \frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} \qquad e^{zi}(1-ix) = e^{-zi}(1+ix)$$

$$e^{2zi} = \frac{1+ix}{1-ix} = \frac{i-x}{i+x} \qquad z = \frac{1}{2i}\log\frac{i-x}{i+x}.$$

Nous sommes ainsi ramenés à une expression de la forme :

$\log\frac{x-a}{x-b}$, que nous avons déjà étudiée. On écrira donc :

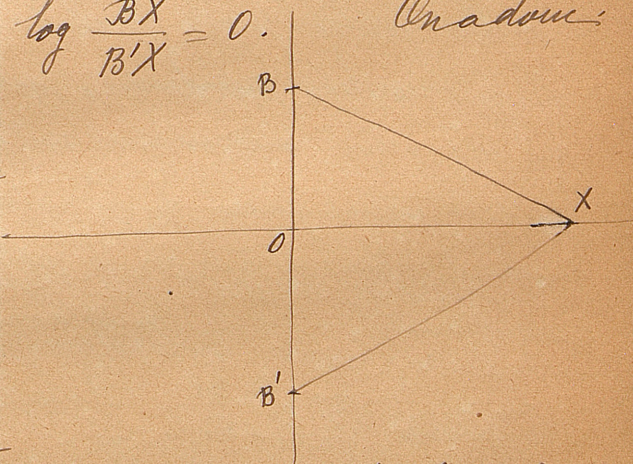
$$z = \frac{1}{2i}\left(\log\frac{x-i}{x+i} + \log(-1)\right) \qquad \log(-1) = \pi i.$$

Soient B, B' les 2 points $+i$, $-i$. Si l'on prend pour coupure le segment BB', la fonction $\log \frac{x-i}{x+i}$ peut ~~être~~ définie d'une façon univoque dans le plan coupé. On peut prendre pour sa détermination principale : $\log \frac{BX}{B'X} - i\, B\hat{X}B'$

l'angle $B\hat{X}B'$ étant inférieur à π. On pourra prendre pour la valeur de z : $\frac{1}{2i}\left[\log \frac{BX}{B'X} - i\, B\hat{X}B' + \pi i\right]$

Cette détermination concorde avec la valeur géométrique de arc tang x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ pour x réel.

Supposons x réel et positif, $\log \frac{BX}{B'X} = 0$. On a donc :



$z = \frac{1}{2}\left(\pi - B\hat{X}B'\right)$

Cet angle : $\frac{\pi}{2} - \frac{B\hat{X}B'}{2}$ est la valeur géométrique de l'angle $B\hat{B'}X$; on voit que z = arc tang x au sens géométrique — toutes les autres valeurs de z s'obtiennent en ajoutant $n\pi$ à la détermination principale c.à.d. $2n\pi$ à l'angle BXB' compris dans la parenthèse et multiplié par i.

On peut adopter comme définition générale de arc tang x la formule : $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} B\hat{X}B' + \frac{i}{2}\log \frac{BX}{B'X}$

Quand x réel est négatif, l'angle $B\hat{X}B'$ est négatif, de sorte que $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} B\hat{X}B'$ n'est plus l'angle géométrique $B\hat{B'}X$: il ~~est~~ en

~~augmente~~ diffère de π. Ce résultat était à prévoir : car si l'on part de x positif pour arriver à x négatif sans traverser la coupure, on ne trouve pas la même valeur qu'en suivant l'axe des x, qui traverse la coupure : or dans ce dernier cas on suit la détermination géométrique de : arc tang x

Soit X du côté des x positifs, supposons que x aille de 0 en X, et qu'on parte de 0 avec la valeur 0 pour arctg x, on pourra adopter pour cet arc la définition ; $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\, B\hat{X}B' + \frac{i}{2} \log \frac{BX}{B'X}$ qui se rattache par continuité à la valeur de arctg x pour x réel et positif. — Si X est du côté négatif il faudra diminuer de π l'expression précédente, pour que arc tg x se relie encore par continuité aux valeurs qu'il prend pour x réel et négatif. On peut même partir de l'origine avec la valeur 0 et suivre la coupure, pourvu qu'on n'aille ni en B ni en B', où il y a discontinuité. — Remplaçons x par ξi :

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{i - \xi i}{i + \xi i} = \frac{1}{2i} \log \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

Ce logarithme est réel ; sa détermination principale s'annule pour $\xi = 0$. C'est de cette valeur qu'on partira pour définir arctg x le long de BB'.

— Nous allons nous proposer de développer la fonction : $\operatorname{Sh} x$ en un produit infini. On sait qu'elle est égale à :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{m=\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m - \left(1-\frac{x}{m}\right)^m}{2} \qquad m \text{ entier \& positif}$$

Pour simplifier, nous supposerons que m croisse par des valeurs impaires. Le numérateur de la fraction est un polynôme entier en x, de degré $(m-1)$ et il admet la racine 0 ; les autres racines peuvent être trouvées en résolvant une équation binôme. On peut donc le décomposer en un produit de facteurs binômes, où l'on fera ensuite croître m indéfiniment. On obtiendra ainsi l'expression de $\operatorname{Sh} x$ en un produit infini.

Résolvons donc d'abord l'équation : $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m - \left(1-\frac{x}{m}\right)^m = 0$

$$\left(\frac{1+\frac{x}{m}}{1-\frac{x}{m}}\right)^m = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

$$\frac{1+\frac{x}{m}}{1-\frac{x}{m}} = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} = e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

k devant prendre m valeurs entières consécutives, on pourra le faire varier de $-\frac{m-1}{2}$ à $+\frac{m-1}{2}$.

$$1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}} + \frac{x}{m}\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}} + 1\right) = 0$$

$$x = m\,\frac{e^{\frac{2k\pi i}{m}} - 1}{e^{\frac{2k\pi i}{m}} + 1} = m\,\frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{e^{\frac{k\pi i}{m}} + e^{-\frac{k\pi i}{m}}} = m\,\frac{i\sin\frac{k\pi}{m}}{\cos\frac{k\pi}{m}} = m\,i\,\operatorname{tang}\frac{k\pi}{m}.$$

Cette formule donne les m racines du polynôme $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m - \left(1-\frac{x}{m}\right)^m$.

Ce polynôme est pair, et d'ailleurs on voit que pour des valeurs égales et de signes contraires de k, x prend des valeurs égales et de signes contraires. Donc, si l'on pose : $x_k = mi \operatorname{tang} \frac{k\pi}{m}$,

et que l'on donne à k les valeurs, en nombre m :

$$-\frac{m-1}{2},\ -\frac{m-1}{2}+1, \ldots\ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\ldots \frac{m-1}{2}-1,\ \frac{m-1}{2},$$

on aura les m racines :

$$-x_{\frac{m-1}{2}}, \ldots\ldots -x_2, -x_1, 0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{\frac{m-1}{2}}.$$

(car pour $k=0$, $x=0$). On aura donc décomposé le polynôme en facteurs binômes du 2e degré :

$$\frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m - \left(1-\frac{x}{m}\right)^m}{2} = Ax\left(1+\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_2^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{x^2}{x^2_{\frac{m-1}{2}}}\right)$$

Le coefficient A est facile à déterminer ; c'est la limite, pour $x=0$, du rapport du 2e membre à x. Or la valeur limite du 1er membre est x ; donc $A = 1$.

Puisqu'on donne à k les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \pm\frac{m-1}{2}$, on a toujours : $\frac{k\pi}{m} < \frac{\pi}{2}$, $m \operatorname{tang} \frac{k\pi}{m} > k\pi$, c. à d. $x_k > k\pi i$. Quand m croît indéfiniment, x_k a pour limite $k\pi i$.

On est ~~ainsi~~ amené à penser que $Sh x$ a pour expression la limite du produit infini que nous venons de définir. On va le démontrer rigoureusement.

Appelons θ_m le produit des $\frac{m+1}{2}$ premiers facteurs de ce dévelop-

pement ; on aura identiquement : $\theta_m = \varphi_m \cdot \psi_m$

en posant : $$\varphi_m = x\left(1+\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_2^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x^2}{x_p^2}\right)$$

et : $$\psi_m = \left(1+\frac{x^2}{x_{p+1}^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{x_{p+2}^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right)$$

p étant un entier positif fixe, et m pouvant croître indéfiniment.

φ_m ayant un nombre fini de facteurs a pour limite, pour $m=\infty$:
$$x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)$$

ψ_m a aussi une limite, puisque c'est le quotient de θ_m et de φ_m.

Si l'on développait le produit ψ_m, on aurait un polynôme dont le 1er terme serait 1, et dont les autres termes seraient les puissances entières, positives et croissantes de x ; donc si l'on forme $(\psi_m - 1)$ c'est un polynôme entier en x sans terme constant.

Posons $|x| = \rho$. On aura :
$$|\psi_m - 1| \leq \left(1+\frac{\rho^2}{x_{p+1}^2}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{x_{p+2}^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\rho^2}{x_{\frac{m-1}{2}}^2}\right)$$

Or : $x_k > k\pi$. Si l'on remplace x_k par $k\pi$, on diminue les dénominateurs, donc on augmente les facteurs et le produit :
$$|\psi_m - 1| \leq \left(1+\frac{\rho^2}{(p+1)^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\rho^2}{(p+2)^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\rho^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right)$$

Or le produit infini dont le terme général est : $\left(1+\frac{\rho^2}{n^2\pi^2}\right)$ est convergent, puisque la série dont le terme général est $\frac{\rho^2}{n^2\pi^2}$ est convergente. Donc si l'on se donne un nombre positif ε,

on peut lui faire correspondre un entier positif p, tel que le produit d'autant de termes qu'on voudra pris au-delà du p^e diffère de 1 de moins de ε. On pourra alors écrire : $\varphi_m = 1 + \varepsilon_p$

et : $$\theta_m = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)(1+\varepsilon_p)$$

$|\varepsilon_p|$ tendant vers 0 quand p augmente indéfiniment ; ce qui prouve que θ_m a pour limite, pour $m = \infty$, la valeur du produit infini :
$$x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$
absolument convergent quel que soit x. On a donc bien :
$$\operatorname{Sh} x = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$
d'où : $$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$
et : $$\sin \pi x = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots\cdots$$
On peut se proposer de trouver un développement analogue pour $\cos x$. On pourrait remplacer x par $\frac{\pi}{2} - x$ et effectuer la transformation. Nous préférons employer la formule : $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$
$$\cos x = \frac{2x\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots\cdots}{2x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots\cdots}$$
Les facteurs qui contiennent les ~~puissances~~ valeurs paires de n, ~~composent~~ au numérateur, composent entièrement le dénominateur ; celui-ci disparaît donc et il reste : $$\cos x = \left(1-\frac{x^2}{\frac{\pi^2}{4}}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\frac{\pi^2}{4}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{(2k+1)^2\frac{\pi^2}{4}}\right)\cdots\cdots$$
d'où : $$\cos \pi x = \left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\cdots\cdots$$

On voit que, parmi toutes les valeurs réelles et imaginaires de x, $\sin x$ ne s'annule que pour $x = \pm n\pi$. De même $\cos x$ ne s'annule que pour $x = \pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$.

Ces formules mettent encore en évidence la périodicité des fonctions trigonométriques. Considérons par exemple $\sin \pi x = \lim_{n=\infty} \varphi_n$.

$$\varphi_n = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$(n!)^2\varphi_n = x(1-x)(2-x)\cdots\cdots(n-x)(1+x)(2+x)\cdots\cdots(n+x)$$

$$(n!)^2\varphi_n(x+1) = (x+1)x(1-x)(2-x)\cdots(n-x-1)(2+x)\cdots\cdots(n+x+1)$$

Donc $\dfrac{\varphi_n(x+1)}{\varphi_n(x)} = \dfrac{n+x+1}{n-x}$

Or, si n croît indéfiniment, la fraction a pour limite -1.

On en conclut : $\sin\pi(x+1) = -\sin\pi x$

$$\sin\pi(x+2) = \sin\pi x$$

Ainsi la fonction $\sin\pi x$ a pour période 2, et la fonction $\sin x$ a pour période 2π.

On prouverait aisément par les mêmes formules :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Les séries par lesquelles on a précédemment développé $\cos x$ et $\sin x$ ont fait ressortir certaines propriétés de ces fonctions, par exemple les formules d'addition, l'identité : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, les propriétés des dérivées et leur périodicité ; les produits infinis que nous considérons maintenant en manifestent d'autres.

M. Hermite en a déduit un procédé général pour construire des fonctions à double période.

Remarque. Nous avons ci-dessus décomposé φ_n en facteurs du 1er degré ; il faudrait bien se garder d'effectuer la même décomposition sur le produit infini, car les 2 produits ainsi obtenus ne seraient pas convergents. Si l'on prend les p premiers ~~termes~~ facteurs de la forme $\left(1-\frac{x}{n}\right)$ et les q premiers facteurs de la forme $\left(1+\frac{x}{n}\right)$, on forme un produit dont la valeur dépend de p et de q. Si $p=q$, et qu'on les fasse croître indéfiniment, alors le produit a pour limite $\sin \pi x$, par exemple ; mais si p et q croissent arbitrairement, le produit ~~n'~~a ~~pas de~~ une limite arbitraire ; si le rapport $\frac{p}{q}$ tend vers une certaine limite, le produit tend vers une limite qui dépend de la limite de ce rapport.

On peut transformer $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ en un produit infini de facteurs du 1er degré absolument convergent.

Le produit infini $\Pi\left(1-\frac{x}{n}\right)$ est divergent, mais le produit infini $\Pi\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ est convergent, car : $\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}} = 1 - \frac{x^2}{2n^2} - \dots\dots$

ou : $\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}} - 1 = -\frac{x^2}{2n^2} - \dots\dots$

donc le produit infini $\Pi\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ est absolument convergent quel que soit x. On a par conséquent :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x\,\Pi\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\,\Pi\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} = x\,\Pi\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

en donnant à n toutes les valeurs entières positives et négatives (sauf 0).

Le produit infini qui donne l'expression de $\sin \pi x$ en facteurs

du 2e degré est absolument et uniformément convergent : tous ses termes sont convergents, puisque ce sont des binômes ; et si A est un nombre positif fixe quelconque la série :

$$\frac{A^2}{1^2} + \frac{A^2}{2^2} + \frac{A^2}{3^2} + \dots\dots + \frac{A^2}{n^2} + \dots\dots$$

est absolument convergente. Les conditions de transformation étant ainsi vérifiées, on peut mettre le produit infini sous la forme d'une série entière en x ; et on pourra calculer les termes de la série en les identifiant aux termes du produit.

On peut aussi prendre la dérivée logarithmique comme dans un produit limité :

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1^2 - x^2} - \frac{2x}{2^2 - x^2} - \dots\dots - \frac{2x}{n^2 - x^2} - \dots\dots$$

Or : $-\dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n-x} = \dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}$ Donc :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{n=\infty} \sum_{p=-n}^{p=+n} \frac{1}{x+p}$$ p pouvant prendre la valeur 0.

Mais on ne peut prolonger la série $\dfrac{1}{x+p}$ à l'infini, car elle est divergente. La série $\left(\dfrac{1}{x+p} - \dfrac{1}{p}\right)$ est au contraire convergente absolument quel que soit x ; on ne peut plus y faire $p = 0$.

On écrira donc : $$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum \left(\frac{1}{x+p} - \frac{1}{p}\right)$$

p prenant toutes les valeurs positives et négatives non nulles.

De même que tout à l'heure le produit infini $\prod\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)$, la série $\displaystyle\sum_{p=-n}^{p=m} \frac{1}{x+p}$ ne tend vers aucune limite fixe. La somme dépend de la limite du rapport $\dfrac{m}{n}$, si cette limite existe.

En effet, la somme $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{p} - \log p$
a pour limite la constante d'Euler quand p croît indéfiniment.
Si l'on fait croître m et n séparément de telle sorte que le rapport $\frac{m}{n}$ ait une limite, on voit que $\Sigma \frac{1}{p}$ a pour valeur $\log \frac{m}{n}$.

Cette expression de $\cot g\, x$ fait ressortir la périodicité de cette fonction.
On obtiendrait d'une manière analogue le développement de $\tan g\, \pi x$.

— Nous allons montrer comment on pourrait arriver directement à l'expression de $\cot g\, x$.

$$\cot g\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{m=\infty} \theta_m \qquad \text{en posant :}$$

$$\theta_m = i \frac{\left(1+\frac{ix}{m}\right)^m + \left(1-\frac{ix}{m}\right)^m}{\left(1+\frac{ix}{m}\right)^m - \left(1-\frac{ix}{m}\right)^m}$$

Le 2e membre est une fonction rationnelle en x ; on peut trouver les racines du dénominateur et décomposer la fraction en fractions simples ; on aura θ_m exprimé par une somme de fractions.

$$\left(1+\frac{ix}{m}\right)^m - \left(1-\frac{ix}{m}\right)^m = 0, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1+\frac{ix}{m}}{1-\frac{ix}{m}}\right)^m = 1.$$

$$\frac{1+\frac{ix}{m}}{1-\frac{ix}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{m}} \qquad \text{Supposons toujours } m \text{ impair}$$

$$1 + e^{\frac{2k\pi i}{m}} - \frac{ix}{m}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right) = 0.$$

$$x = \frac{m}{i} \times \frac{e^{\frac{k\pi i}{m}} - e^{-\frac{k\pi i}{m}}}{e^{\frac{k\pi i}{m}} + e^{-\frac{k\pi i}{m}}} = m \tan g \frac{k\pi}{m}$$

Posons : $x_k = m \tan g \frac{k\pi}{m} > k\pi$.

Remarquons que le numérateur de la fraction est d'un degré inférieur au dénominateur, car les termes en x^m se détruisent.
Cette fraction sera décomposée en m fractions simples de la forme :
$\frac{B_k}{x-x_k}$. On obtiendra B_k en remplaçant x par x_k dans la fraction :
$$\frac{\left(1+\frac{ix}{m}\right)^m+\left(1-\frac{ix}{m}\right)^m}{\left(1+\frac{ix}{m}\right)^{m-1}+\left(1-\frac{ix}{m}\right)^{m-1}}$$
On doit avoir : $B_k = B_{-k}$, car cette fraction est une fonction paire de x. Pour $x=0$, $B_0 = 1$; la 1[e] fraction simple est donc : $\frac{1}{x}$.
$$B_k = \frac{\left(1+i\,tg\frac{k\pi}{m}\right)^m+\left(1-i\,tg\frac{k\pi}{m}\right)^m}{\left(1+i\,tg\frac{k\pi}{m}\right)^{m-1}+\left(1-i\,tg\frac{k\pi}{m}\right)^{m-1}} = \frac{2\cos k\pi}{\cos\frac{k\pi}{m}\,2\cos\frac{m-1}{m}k\pi}$$
$$= \frac{\cos k\pi}{\cos\frac{k\pi}{m}\cos\frac{k\pi(m-1)}{m}}$$
Réunissons les 2 fractions où k est égal et de signes contraires :
$$\frac{B_k}{x-x_k}+\frac{B_k}{x+x_k} = \frac{2B_k x}{x^2-x_k^2}$$
Donc :
$$\theta_m = \frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{k=\frac{m-1}{2}}\frac{2x}{\cos^2\frac{k\pi}{m}\left(x^2-m^2 tg^2\frac{k\pi}{m}\right)}$$
[On a identiquement : $\cos k\pi\frac{m-1}{m} = (-1)^k\cos\frac{k\pi}{m}$.]

Quand m augmente indéfiniment, $x_k = m\,tg\frac{k\pi}{m}$ tend vers $k\pi$, et on retrouve la même formule que précédemment.
La démonstration rigoureuse de ce développement se fera comme pour $Sh\,x$. On fixe un entier p, et on pose : $\theta_m = \varphi_m + \psi_m$



$$\varphi_m = \sum_{K=0}^{K=p} \frac{2x}{\cos^2\frac{K\pi}{m}(x^2 - x_K^2)} \qquad \psi_m = \sum_{K=p+1}^{K=\frac{m-1}{2}} \frac{2x}{\cos^2\frac{K\pi}{m}(x^2 - x_K^2)}$$

Quand m augmente indéfiniment, θ_m a pour limite $\cot g\, x$.

φ_m a pour limite : $\frac{1}{x} + \sum_{K=1}^{K=p} \frac{2x}{x^2 - K^2\pi^2}$

Donc ψ_m a une limite ; on va montrer que cette limite tend vers 0 quand p augmente indéfiniment. En effet, soit $\rho = |x|$; x_K est réel positif ; donc $|x^2 - x_K^2| < |\rho^2 - x_K^2|$

et comme $x_K > K\pi$, $\qquad |x^2 - x_K^2| > |\rho^2 - K^2\pi^2| = K^2\pi^2 - \rho^2$

Donc $\quad |\psi_m| < \frac{1}{\cos^2\frac{K\pi}{p+1}} \cdot \sum_{p+1}^{\infty} \frac{2\rho}{K^2\pi^2 - \rho^2} \qquad m \geq p+1.$

La série $\frac{2\rho}{K^2\pi^2 - \rho^2}$ est convergente. Donc on peut prendre p assez grand pour qu'on ait : $|\psi_m| < \varepsilon_p$

ε_p tendant vers 0 quand p augmente indéfiniment.

Nous avons ainsi établi la formule de développement :

$$\cot g\, x = \frac{1}{x} + \sum \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

On voit que la série Σ est absolument et uniformément convergente, abstraction faite des valeurs qui rendent la fraction infinie.

Bornons-nous aux valeurs de x telles que $|x| < A < \pi$, $(\pi - A)$ pouvant d'ailleurs être aussi petit qu'on veut.

Toutes les fractions $\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de x^2.

$$\frac{1}{x^2-n^2\pi^2} = -\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}} = -\frac{1}{n^2\pi^2}\left[1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\frac{x^6}{n^6\pi^6}+\dots\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{x^2}{n^4\pi^4}+\frac{x^4}{n^6\pi^6}+\frac{x^6}{n^8\pi^8}+\dots\dots\right]$$

Série convergente quand on y fait $x = A$. Ainsi $\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$ peut être développé suivant les puissances entières et positives de x^2. Désignons par S_r la somme de la série convergente:

$$1+\frac{1}{1^r}+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\dots\dots+\frac{1}{n^r}+\dots\dots \text{ pour } r>1.$$

on aura: $\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = 2x\left(\frac{S_2}{\pi^2}+\frac{S_4 x^2}{\pi^4}+\frac{S_6 x^4}{\pi^6}+\dots\dots\right)$

série convergente pourvu que $|x| < \pi$.

Si l'on multiplie tous les termes de l'expression de $\operatorname{cotg} x$ par $\sin x$ développé en série, et si $\cos x$ est aussi développé en série, on aura une identité entre cette série et la série obtenue en appliquant la règle de multiplication des séries. Les coefficients de x sont des nombres rationnels liés par des relations très-simples aux nombres de Bernouilli:

$$B_n = \frac{1.2.3.\dots.2n\,.\,S_{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$$

Le n^e coefficient, c.à.d. celui de x^{2n}, a en effet pour expression:

$$\frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} - \frac{S_{2n-2}}{3!\,\pi^{2n-2}} + \frac{S_{2n-4}}{5!\,\pi^{2n-4}} - \dots\dots + (-1)^n\frac{S_2}{(2n-1)!\,\pi^2}$$

Étude des courbes et des surfaces au moyen des séries.

On représente en général une courbe plane par une équation de la forme : $f(x, y) = 0$ entre ses 2 coordonnées. D'autre part, il est commode en géométrie analytique de concevoir une courbe comme définie, non par une relation entre ses 2 coordonnées, mais par ses coordonnées données en fonction d'un seul paramètre. De même, pour les courbes de l'espace au lieu de les définir par 2 équations entre les 3 coordonnées, on peut exprimer ces coordonnées en fonction d'un seul paramètre ; et pour les surfaces, au lieu de les définir par une relation entre les 3 coordonnées, on peut exprimer ces coordonnées en fonction de 2 paramètres variables. On a admis jusqu'ici que ces deux façons de concevoir et de définir analytiquement les figures étaient équivalentes. La démonstration rigoureuse de cette équivalence est nécessaire ; elle repose sur la théorie des fonctions implicites. Nous ne ferons pas cette démonstration avec tous les développements qu'elle comporte ; nous nous bornerons à quelques indications sur la méthode à employer.

Considérons une courbe plane définie par l'équation :

$$f(x, y) = 0$$

et un de ses points, c.à.d. un système de valeurs (x_1, y_1) vérifiant cette équation. Transportons l'origine en ce point ; les anciennes coordonnées deviennent $(x_1 + x)$, $(y_1 + y)$.

Développons $f(x,y)$ ainsi transformée par la formule de Taylor. Si $f(x,y)$ est un polynôme, le développement sera limité, donc toujours convergent. Sinon, et si f est une fonction continue de x et y, on pourra obtenir un développement convergent au moins pour certains systèmes de valeurs attribuées à x, y.

Les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives de plusieurs variables donnent lieu à des propositions analogues à celles qui concernent les séries dont les termes sont fonctions d'une seule variable. Ce sont des séries à double, triple ...... multiple entrée.

Le théorème fondamental d'Abel s'étend sans peine à ces séries. — Si pour un système de valeurs (x', y') tous les termes restent en valeur absolue inférieurs à un nombre fixe A, la série à double entrée reste convergente pour tous les systèmes de valeurs tels que: $|x| < |x'|$ $|y| < |y'|$.

On démontrerait ensuite que si la série à double entrée est absolument convergente pour un système de valeurs (x', y') elle est absolument convergente pour tout système de valeurs tel que: $|x| < |x'|$, $|y| < |y'|$.

Il suffit de comparer terme à terme les 2 développements.

— Supposons que la série obtenue en développant $f(x,y)$ soit convergente pour des valeurs suffisamment petites de x, y. Supposons encore que dans cette série figure au moins un terme

du 1er degré, c.à.d. que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ ne sont pas nuls à la fois.
(ceci exclut l'hypothèse où le point (x_1, y_1) serait un point singulier).
Par exemple, le coefficient de y n'est pas nul; divisons le développement par ce coefficient, et faisons passer y dans un membre:

$$y = ax + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots\ldots$$

φ_n étant un polynôme homogène du n^e degré en x, y.
La série étant par hypothèse absolument convergente, on peut y grouper les termes dans l'ordre qui convient. — Si elle est absolument convergente pour le système de valeurs (x', y') la série de même forme qu'on obtiendrait en remplaçant

x par $x'\xi$ et y par $y'\eta$

serait convergente pour tous les systèmes de valeurs tels que:

$$\xi \leq 1, \qquad \eta \leq 1.$$

On peut donc toujours supposer que la série est convergente pour : $x = 1$, $y = 1$, puisqu'on peut toujours la ramener à ce cas par un changement de variables approprié.
On va démontrer l'existence d'une série entière en x, convergente pour des valeurs inférieures à une certaine limite, et telle que substituée à y dans ~~le développement de y~~ l'équation précédente elle satisfasse identiquement cette équation.
Il en résultera que pour des valeurs de x voisines de 0, l'équation en y admet une racine dont l'expression sera la somme de la série entière en x. D'ailleurs, il n'y a qu'une seule racine de cette équation

voisine de 0. En effet, si l'on fait passer tous les termes dans le même membre:
$$0 = -y + ax + \varphi_2(x,y) + \ldots\ldots$$
on voit que la dérivée par rapport à y tend vers -1 quand x et y tendent vers 0. Il ne peut donc y avoir 2 racines voisines de 0.

Supposons qu'en effet il existe une série entière en x
$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots$$
convergente pour x suffisamment petit, et qui substituée à y satisfasse identiquement l'équation. Si l'on opère cette substitution, on pourra ordonner le 2e membre suivant les puissances entières et positives de x; on égalera les coefficients correspondants dans les 2 membres, et on aura ainsi la valeur des coefficients indéterminés α. Posons par exemple:
$$\varphi_2(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$
$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots = ax + Ax^2 + B(\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \ldots\ldots)$$
$$+ C(\alpha_1^2 x^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x^3 + \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$
d'où l'on tire:
$$\alpha_1 = a.$$
$$\alpha_2 = A + B\alpha_1 + C\alpha_1^2$$
$$\alpha_3 = \psi_3(\alpha_1, \alpha_2)$$
$$\alpha_4 = \psi_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{etc}$$
Les fonctions ψ_n étant des polynômes entiers en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ du degré n. Ces formules déterminent $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ de proche en proche. Ainsi la série, si elle existe, est absolument

déterminée et unique.

Par hypothèse, la série est absolument convergente pour $x=1$, $y=1$; donc les coefficients doivent tendre vers 0, et par suite rester inférieurs en valeur absolue à un nombre positif fixe M.

A la place de l'équation : $y = ax + \varphi_2(x, y) + \ldots\ldots$

considérons l'équation : $y = M(x + x^2 + xy + y^2 + x^3 + \ldots\ldots)$

Le 2e membre n'est pas convergent pour $x=1$, $y=1$, mais il l'est pour tout système de valeurs telles que $|x|<1$, $|y|<1$.

On peut en obtenir aisément la somme dans ce dernier cas.

On sait en effet que la série : $1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + \ldots\ldots$

est le produit des 2 séries : $\begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \\ 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots\ldots \end{cases}$

Sa somme est donc égale à $\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$

L'équation revient donc à celle-ci : $y = M\left(\dfrac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - y\right)$

On peut essayer de satisfaire cette équation par une série de la forme : $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots\ldots$

Il est manifeste que les coefficients β seraient déterminés successivement par des relations analogues à celles qui déterminent les coefficients α. On voit aussi que dans ces relations tous les termes sont positifs, et M remplace tous les coefficients $A, B, C, \ldots\ldots$ Donc tous les nombres β sont positifs et plus grands que les valeurs absolues des nombres α correspondants.

Il en résulte que, si la série $\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots\ldots$
est convergente, la série : $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots$
le sera également.

Il suffit donc de prouver qu'il y a une série convergente qui substituée à y satisfait l'équation : $y = M\left(\frac{1}{(1-x)(1-y)} - 1 - y\right)$

$$(1-y)y = M\left(\frac{1}{1-x} - 1 + y^2\right) \qquad (M+1)y^2 - y + \frac{Mx}{1-x} = 0 .$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{M(M+1)x}{1-x}}}{M+1} \qquad \sqrt{\frac{1-(2M+1)^2 x}{1-x}}$$

Le numérateur peut être développé en série pourvu que :

$|x| < \frac{1}{(2M+1)^2}$ Le facteur $\frac{1}{1-x}$ qui représente le dénominateur forme une série convergente pour $|x| < 1$.

Donc l'expression de y est développable en série convergente à la seule condition : $|x| < \frac{1}{(2M+1)^2}$

Cette série pourra être ordonnée suivant les puissances entières et positives de x ; et pour que y s'annule en même temps que x, il faudra prendre le radical avec le signe $-$.

A plus forte raison la série : $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots$ sera absolument convergente pour des valeurs suffisamment petites de x ; d'ailleurs elle satisfera à l'équation en y :

$$y = ax + \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \ldots\ldots$$

Cette série, dans les limites où elle est convergente définit très nettement la courbe aux environs du point (x_1, y_1). En prenant pour origine successivement d'autres points voisins, on déterminerait de proche en proche un arc de courbe. On démontrerait aisément qu'on peut ainsi s'avancer sur une courbe jusqu'à ce qu'on rencontre un point singulier.

Dire que y s'exprime par une série entière en x, c'est dire que y et x sont fonctions d'un même paramètre.

Si le coefficient de y était nul, celui de x ne le serait pas, par hypothèse, et on pourrait par des opérations semblables exprimer x en série entière en y. Le raisonnement est donc valable tant que le point considéré n'est pas un point singulier.

— Remarquons que le coefficient de x dans la série qui exprime y est a, c.à.d. le même que ds l'équation en x et y.

— Un raisonnement analogue s'appliquerait aux surfaces —

Considérons une surface définie par l'équation :

$$f(x, y, z) = 0,$$

et supposons tout de suite qu'elle passe par l'origine, et que l'origine ne soit pas un point singulier. Il y aura au moins un terme du 1er degré dans l'équation développée par la formule de Taylor. Si, par exemple, le coefficient de z n'est pas nul, on pourra diviser par ce coefficient, et on aura l'équation :

$$z = ax + by + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots\ldots$$

le 2e membre étant une série que nous supposons absᵗ convergente
On démontrera l'existence d'une série de la forme :

$$z = ax + by + \psi_2(x,y) + \psi_3(x,y) + \ldots\ldots$$

convergente pour des valeurs suffisamment petites de x et de y, et qui, substituée à z, vérifie identiquement l'équation précédente.

Cette série définit sans ambiguïté la surface au voisinage de l'origine — Cela prouve qu'on peut déterminer la surface en exprimant x, y, z en fonctions de 2 paramètres variables.

— Soit maintenant une courbe de l'espace définie comme l'intersection des 2 surfaces : $f(x,y,z)=0$, $\varphi(x,y,z)=0$
Nous supposons toujours qu'elle passe par l'origine. On pourra remplacer ces 2 équations par 2 séries en x et y :

$$z = ax + by + \psi_2(x,y) + \psi_3(x,y) + \ldots\ldots$$

$$z = \alpha x + \beta y + \chi_2(x,y) + \chi_3(x,y) + \ldots\ldots$$

On peut les retrancher membre à membre :

$$0 = (a-\alpha)x + (b-\beta)y + (\psi_2 - \chi_2) + (\psi_3 - \chi_3) + \ldots\ldots$$

Si un des 2 coefficients $(a-\alpha)$, $(b-\beta)$ n'est pas nul on pourra diviser tous les termes par celui-là, et on aura par exemple y exprimé par une série entière en x.
Si l'on porte cette valeur de y dans une des 2 premières séries, on aura l'expression de z par une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, c.à.d. qu'on aura exprimé

y et z en séries entières en x.

Que signifie maintenant cette condition que les coefficients $(a-\alpha)$, $(b-\beta)$ ne soient pas nuls en même temps ?

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point pris pour origine ; les 2 développements des équations f et φ en séries de Taylor sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x + \frac{\partial f}{\partial y_1} y + \frac{\partial f}{\partial z_1} z + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} z + \cdots\cdots$$

$$a = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \qquad b = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \qquad \alpha = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} \qquad \beta = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}}$$

On ne doit donc pas avoir simultanément :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} \qquad \text{et :} \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}}$$

Ainsi on pourra exprimer x, y, z en fonctions d'un même paramètre variable, à la condition que les 3 déterminants :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

ne soient pas nuls à la fois –

Dire que ces 3 déterminants sont nuls, c'est dire que les 2 surfaces dont l'intersection devrait être la courbe considérée sont tangentes au point (x_1, y_1, z_1).

29e Définition de la tangente

Soit une courbe plane définie par ses coordonnées en fonction d'un paramètre variable : $x = f(t) \quad y = \varphi(t)$
Soient 2 valeurs voisines de ce paramètre : t, $(t+h)$.
Les 2 quantités : $f(t+h) - f(t)$, $\varphi(t+h) - \varphi(t)$
considérées comme des paramètres directeurs définissent la direction qui va du point t au point $(t+h)$. Cette direction a le même sens que la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont :

$$\varphi(t+h) - \varphi(t), \qquad f(t+h) - f(t)$$

Les paramètres directeurs : $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$, $\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$
définissent évidemment la même direction. Quand on fait tendre h vers 0, le point $(t+h)$ tend vers le point t, et les 2 paramètres directeurs ont pour limites respectives $f'(t)$, $\varphi'(t)$. Ces 2 dérivées sont donc les paramètres directeurs de la tangente au point t dans le sens de t croissant.

Dans l'espace, soient x, y, z données en fonction d'un paramètre t, leurs dérivées par rapport à t sont les paramètres directeurs de la tangente au point t dans le sens de t croissant.
Les cosinus directeurs se déduisent sans difficulté des paramètres directeurs.

Ainsi l'équation de la tangente à une courbe plane, au point (x, y) est :

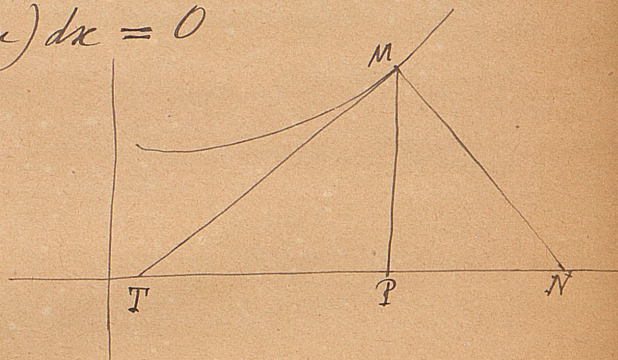
$$\frac{X - x}{f'(t)} = \frac{Y - y}{\varphi'(t)}$$

ou encore : $\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}$

dx, dy pouvant représenter soit les dérivées, soit les différentielles.
Si y est fonction de x, soit y' sa dérivée par rapport à x ;
l'équation devient : $Y-y = y'(X-x)$

L'équation de la normale (en coordonnées rectangulaires) est :

$$(Y-y)\,dy + (X-x)\,dx = 0$$



On sait calculer les formules de la sous-normale PN et de la sous-tangente PT.

Dans l'espace les équations de la tangente sont de la forme :

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

et l'équation du plan normal est :

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0.$$

Si la courbe plane est donnée par l'éq : $f(x,y) = 0$
dx, dy seront définis dans leur rapport par l'éq. différentielle :

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0 \qquad \text{d'où :} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

L'éq. de la tangente en (x,y) devient :

$$(X-x)\,f'_x + (Y-y)\,f'_y = 0.$$

Dans l'espace, soit la courbe définie par les 2 équations :

$f(x,y,z)=0$ et $\varphi(x,y,z)=0$

Les 2 équations différentielles :

$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0$ $\qquad \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0$

donnent les rapports de dx, dy, dz, qu'on pourra porter dans l'équation de la tangente. Mais il est plus simple de remplacer dans ces équations dx, dy, dz par les quantités $(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$ qui leur sont proportionnelles : la tangente est donc définie par les 2 équations :

$$\begin{cases} (X-x)f'_x + (Y-y)f'_y + (Z-z)f'_z = 0 \\ (X-x)\varphi'_x + (Y-y)\varphi'_y + (Z-z)\varphi'_z = 0 \end{cases}$$

Si, laissant ~~la~~ invariable la surface définie par la 1e équation : $f(x,y,z)=0$, on fait varier la surface : $\varphi(x,y,z)=0$ qui coupe la 1e suivant différentes courbes passant par le point (x,y,z) la tangente à chacune de ces courbes sera toujours dans le plan : $(X-x)f'_x + (Y-y)f'_y + (Z-z)f'_z = 0$

qu'on appelle pour cette raison le plan tangent à la surface $f(x,y,z)=0$ au point (x,y,z).

— Considérons maintenant une courbe plane définie en coordonnées polaires, ρ, θ, exprimées en fonction de t.

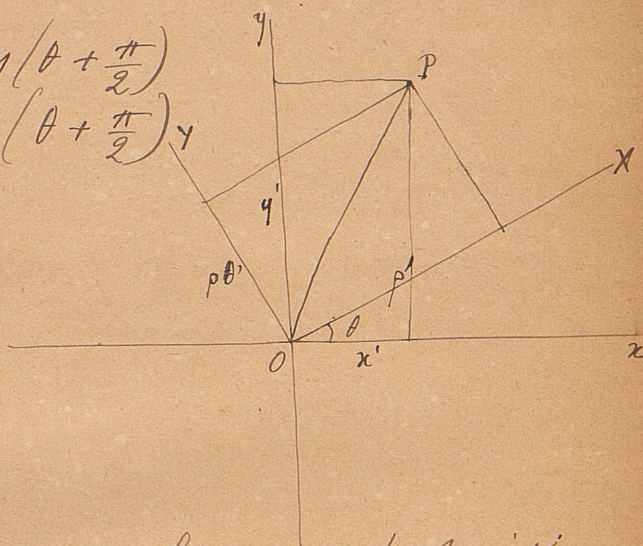
On connaît les formules de transformation en coordonnées cartésiennes :

$x=\rho\cos\theta$ $\qquad y=\rho\sin\theta$

Ces formules définissent x et y en fonction de t, et déterminent la courbe en coordonnées rectangulaires. Prenons les dérivées de ces 2 équations par rapport à t :

$$x' = \rho' \cos\theta + \rho\theta' \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = \rho' \sin\theta + \rho\theta' \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$



Soient OX, OY les 2 directions θ et $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$. Portons sur OX et OY respectivement 2 segments égaux à ρ' et $\rho\theta'$, à partir de l'origine, et avec leur signe (les sens OX, OY étant positifs.)

On voit que x', y' sont respectivement la somme des projections de ces 2 segments sur Ox, Oy, c.à.d. les projections de leur résultante. Soit P le point $(\rho', \rho\theta')$. Le segment OP définit sans ambiguïté la direction de la tangente qui correspond au sens de t croissant. La tangente de l'angle de OP avec OX est :

$$\frac{\rho\theta'}{\rho'} = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$$

Cet angle est égal à celui que fait la tangente au p. (ρ, θ) avec le rayon vecteur de ce point — L'angle de la normale avec le rayon vecteur s'obtient immédiatement.

On peut calculer aussi la sous-normale et la sous-tangente en coordonnées polaires. Soient la normale MN et la tangente MT

limités à leur rencontre avec la perpendiculaire menée par l'origine au rayon vecteur. On convient de considérer comme positives les directions $\theta = 0$, et $\theta = \frac{\pi}{2}$. ON et OT sont alors définies sans ambiguïté. L'éq. de la tangente est :

$$\frac{X-\rho}{\rho'} = \frac{Y}{\rho\theta'}$$

et celle de la normale est : $(X-\rho)\rho' + Y\rho\theta' = 0$

Si l'on fait $X=0$, on a les éq. de la sous tangente et de la sous-normale au p. Y : $OT = -\frac{\rho^2\theta'}{\rho'} = -\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$ $ON = \frac{\rho'}{\theta'} = \frac{d\rho}{d\theta}$

La méthode qu'on vient d'appliquer aux coordonnées polaires s'appliquerait à un système de coordonnées curvilignes quelconque. Supposons un point défini par 2 coordonnées curvilignes u, v ; c'est l'intersection des 2 courbes correspondant aux équations ; $u = c^{te}$, $v = c^{te}$

Soient les formules de transformation en coordonnées rectilignes :

$$x = f(u,v) \qquad y = \varphi(u,v)$$

Si u et v sont fonctions d'un paramètre t, ces 2 équations définissent la courbe en coordonnées rectilignes.

Considérons le cas plus général d'une courbe tracée sur une surface quelconque (et non plus sur un plan) Soient :

$$x = f(u,v) \qquad y = \varphi(u,v) \qquad z = \psi(u,v)$$

les équations de cette surface. Si u et v sont fonctions d'un paramètre t, ces 3 équations définissent une courbe de cette surface. Prenons les dérivées par rapport à t :

$$x' = f'_u u' + f'_v v'$$
$$y' = \varphi'_u u' + \varphi'_v v'$$
$$z' = \psi'_u u' + \psi'_v v'$$

Ces 3 quantités, considérées comme paramètres directeurs, définissent la direction de la tangente qui correspond à t croissant. Appelons α, β, γ les cosinus directeurs qui répondent à $f'_u, \varphi'_u, \psi'_u$, c.à.d. ceux de la tangente à la courbe $v = c^{te}$ qui passe par le point considéré ; de même, appelons $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ les cosinus directeurs qui répondent à $f'_v, \varphi'_v, \psi'_v$, c.à.d. ceux de la tangente à la courbe $u = c^{te}$ qui passe par le point considéré. On a :

$$\alpha = \frac{f'_u}{\sqrt{E}} \qquad \beta = \frac{\varphi'_u}{\sqrt{E}} \qquad \gamma = \frac{\psi'_u}{\sqrt{E}}$$

$$\alpha_1 = \frac{f'_v}{\sqrt{G}} \qquad \beta_1 = \frac{\varphi'_v}{\sqrt{G}} \qquad \gamma_1 = \frac{\psi'_v}{\sqrt{G}}$$

en posant, comme d'habitude : $E = (f'_u)^2 + (\varphi'_u)^2 + (\psi'_u)^2$

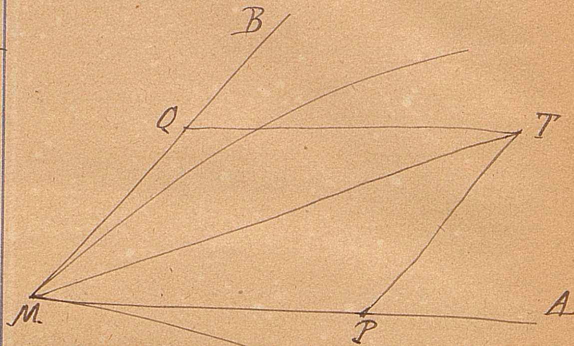
$$G = (f'_v)^2 + (\varphi'_v)^2 + (\psi'_v)^2$$

Les radicaux doivent être pris avec leur valeur arithmétique.

On a alors :

$$x' = \alpha u' \sqrt{E} + \alpha_1 v' \sqrt{G}$$
$$y' = \beta u' \sqrt{E} + \beta_1 v' \sqrt{G}$$
$$z' = \gamma u' \sqrt{E} + \gamma_1 v' \sqrt{G}$$

Ces formules montrent que si sur les directions (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ on porte des segments mesurés par $u'\sqrt{E}$, $v'\sqrt{G}$, avec le signe de u', v', les dérivées x', y', z', sont les projections de la résultante de ces 2 segments ; en sorte que la direction de cette résultante est celle de la tangente à la courbe au point considéré.



Soit M ce point, correspondant à un système de valeurs u, v, c.à.d. à une valeur de t. Figurons les courbes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ passant par M, et leurs tangentes MA, MB ; sur MA portons $MP = u'\sqrt{E}$ avec son signe ; sur MB, $MQ = v'\sqrt{G}$ avec son signe ; leur résultante MT sera la tangente à la courbe considérée. On peut obtenir par des calculs élémentaires les angles que MT fait avec MA, MB.

Les formules se simplifient beaucoup quand les courbes u, v sont orthogonales ; cette condition s'exprime par l'équation :

$$f'_u f'_v + \varphi'_u \varphi'_v + \psi'_u \psi'_v = 0 \qquad \text{ou} \qquad F = 0.$$

On retrouverait par exemple les formules données plus haut dans le cas des coordonnées polaires.

MT est toujours dans le plan AMB ; si u', v' varient, c.à.d. si les fonctions u et v changent, MT décrira le plan AMB.

On retrouve encore ici la notion du plan tangent à la surface.

Sur le cas général des coordonnées curvilignes dans l'espace, nous nous bornerons à de simples indications.

Supposons que tous les points de l'espace soient rapportés à un système de coordonnées curvilignes u, v, w. Soient les formules de transformation en coordonnées cartésiennes :

$$x = f(u, v, w) \qquad y = \varphi(u, v, w) \qquad z = \psi(u, v, w)$$

Chaque point de l'espace est considéré comme l'intersection de 3 surfaces (u_0), (v_0), (w_0). La surface (u_0) par exemple est obtenue en faisant $u = u_0$, et en faisant varier v et w; ainsi des autres. Ces 3 surfaces se coupent deux à deux suivant 3 courbes qui se rencontrent au p. (u_0, v_0, w_0) Par exemple les surfaces (u_0) et (v_0) se coupent suivant la courbe qu'on obtient en faisant $u = u_0$, $v = v_0$, et en faisant varier w seule. Les tangentes en M aux 3 courbes forment un trièdre.

Si maintenant on fait u, v, w fonctions d'un paramètre t, les 3 équations définissent une courbe en coordonnées rectilignes : on pourra trouver 3 nombres mesurant des segments relatifs aux 3 directions des tangentes aux 3 courbes, et la tangente à la courbe sera la résultante de ces segments.

Examinons encore le cas d'une courbe rapportée à un système de coordonnées trilinéaires (dans le plan) ou tétraédriques (dans l'espace.) Les coordonnées x, y, z, u, seront par définition des quantités proportionnelles à autant de fonctions linéaires, indépendantes, des coordonnées cartésiennes. Cela posé, si

x, y, z sont définis en fonction d'un paramètre t, elles déterminent une courbe du plan. On définira la tangente à la courbe au p. (x, y, z) : une droite qui joint le p. (x, y, z) au point (x', y', z'), x', y', z', étant les dérivées par rapport à t. En effet, les coordonnées d'un point voisin du point (x, y, z) ou (t) seront : $f(t+h)$, $\varphi(t+h)$, $\psi(t+h)$

Tout point situé sur ~~cette~~ la droite qui joint les 2 points voisins (t) et $(t+h)$ a pour coordonnées :

$$\lambda f(t) + \mu f(t+h), \quad \lambda\varphi(t) + \mu\varphi(t+h), \quad \lambda\psi(t) + \mu\psi(t+h) .$$

En particulier, les expressions :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \quad \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h}$$

sont les coordonnées d'un point situé sur cette droite. Si l'on fait tendre h vers 0, cette droite devient la tangente à la courbe au point t, et l'on voit qu'elle passe par le point (x', y', z').

De même, dans l'espace, les dérivées des 4 coordonnées sont les coordonnées d'un point de la tangente.

Si l'on a les coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{at^2 + bt + c}{a'''t^2 + b'''t + c'''}, \quad y = \frac{a't^2 + b't + c'}{a'''t^2 + b'''t + c'''}, \quad z = \frac{a''t^2 + b''t + c''}{a'''t^2 + b'''t + c'''}$$

elles définissent une conique quelconque. On peut définir cette courbe par les 4 équations en coordonnées tétraédriques :

$$x = at^2 + bt + c \quad y = a't^2 + b't + c' \quad z = a''t^2 + b''t + c'' \quad u = a'''t^2 + b'''t + c''' .$$

$$x' = 2at + b \quad y' = 2a't + b' \quad z' = 2a''t + b'' \quad u' = 2a'''t + b'''$$

Prenons la tangente au point $t=0$, dont les coordonnées cartésiennes sont : $\frac{c}{c'''}, \frac{c'}{c'''}, \frac{c''}{c'''}$.

Elle passe par le point dont les coordonnées cartésiennes sont :

$$\frac{b}{b'''}, \frac{b'}{b'''}, \frac{b''}{b'''}.$$

La conique ~~considérée qui~~ quand on fait $\frac{1}{t}=0$, passe par le point $\left(\frac{a}{a'''}, \frac{a'}{a'''}, \frac{a''}{a'''}\right)$ et a pour tangente la droite qui joint ce point au point $\left(\frac{b}{b'''}, \frac{b'}{b'''}, \frac{b''}{b'''}\right)$.

Si la courbe est définie dans le plan par une éq. homogène : $f(x,y,z)=0$ et qu'on regarde x, y, z comme fonctions d'un paramètre t, on aurait, en prenant les dérivées par rapport à t : $f'_x x' + f'_y y' + f'_z z' = 0$.

Donc le point (x', y', z') est sur la droite :

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = 0$$

On retrouve ainsi l'équation de la tangente.

124
30e

Définition de l'arc de courbe

Considérons une courbe définie en coordonnées rectangulaires par les 3 éq : $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$
et une portion de cette courbe correspondant aux valeurs de t comprises entre a et b. Nous supposons que les 3 fonctions f, φ, ψ sont continues, ainsi que leurs dérivées, dans l'intervalle (a, b) et que les dérivées f', φ', ψ' ne s'annulent pas simultanément dans cet intervalle (on exclut ainsi l'hypothèse de points singuliers) Partageons l'intervalle (a, b) en n intervalles, en intercalant $(n-1)$ valeurs de t entre a et b dans l'ordre de leurs grandeurs croissantes, par exemple

$$a < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots\ldots\ldots < t_{n-1} < b$$

On obtient ainsi $(n-1)$ points intermédiaires sur la courbe et qui se suivent dans l'ordre ci-dessus. On fera ensuite croître indéfiniment le nombre des valeurs intermédiaires, en leur imposant la condition que la différence entre 2 valeurs consécutives soit moindre que ε. Joignons par des segments de droite tous les points consécutifs qui correspondent aux valeurs $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_{n-1}$. On forme ainsi une ligne brisée inscrite dans l'arc de courbe (ab) ; on voit que le nombre de ses côtés augmentera indéfiniment et qu'ils tendront tous vers 0 ; on va prouver que le périmètre de cette ligne polygonale tend alors vers une limite, qui sera <u>par définition</u> la longueur de l'arc (ab).

Soient 2 valeurs intercalaires consécutives : t_α, $t_{\alpha+1}$; joignons les 2 points correspondants par un segment de droite ; la longueur de cette corde sera : $\sqrt{[f(t_{\alpha+1})-f(t_\alpha)]^2+[\varphi(t_{\alpha+1})-\varphi(t_\alpha)]^2+[\psi(t_{\alpha+1})-\psi(t_\alpha)]^2}$

Or on a, en vertu du théorème des accroissements finis :

$$f(t_{\alpha+1})-f(t_\alpha)=(t_{\alpha+1}-t_\alpha)f'(\theta_\alpha)$$

θ_α étant une valeur comprise entre t_α, et $t_{\alpha+1}$. Remplaçons la différence $f(t_{\alpha+1})-f(t_\alpha)$ et les différences semblables en φ et ψ par leurs expressions en fonction des dérivées correspondantes ; on pourra faire sortir $(t_{\alpha+1}-t_\alpha)$ du radical car c'est une quantité non nulle et on aura :

$$(t_{\alpha+1}-t_\alpha)\sqrt{f'^2(\theta_\alpha)+\varphi'^2(\theta_\alpha)+\psi'^2(\theta_\alpha)}$$

Nous avons supposé que f', φ', ψ' étaient continues ; les 3 dérivées soumises au radical diffèrent donc très peu de $f'(t_\alpha)$, $\varphi'(t_\alpha)$, $\psi'(t_\alpha)$, de sorte que, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif η tel que si tous les intervalles partiels $(t_{\alpha+1}-t_\alpha)$ sont plus petits que η, on ait :

$$\left|f'^2(\theta_\alpha)+\varphi'^2(\theta_\alpha)+\psi'^2(\theta_\alpha)-[f'^2(t_\alpha)+\varphi'^2(t_\alpha)+\psi'^2(t_\alpha)]\right|<\varepsilon$$

Posons donc : $F(t)=f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)$

Le radical pourra s'écrire : $\sqrt{F(t_\alpha)+\varepsilon'}$ $\quad |\varepsilon'|<\varepsilon$.

On a supposé que les 3 dérivées premières ne s'annulaient pas simultanément, donc $F(t)$ ne peut être nul. On peut donc

admettre que $F(t)$ reste supérieur à un nombre positif fixe A, car une fonction continue dans un intervalle atteint son maximum et son minimum. $F(t) > A$.

On peut l'admettre également pour $(F(t) + \varepsilon')$ qui diffère très peu de $F(t)$: on aura : $\sqrt{F(t)+\varepsilon'} - \sqrt{F(t)} = \dfrac{\varepsilon'}{\sqrt{F(t)+\varepsilon'} + \sqrt{F(t)}} < \dfrac{\varepsilon'}{2\sqrt{A}}$

Donc si l'on substitue $\sqrt{F(t_\alpha)}$ à $\sqrt{F(\theta_\alpha)}$ dans l'expression de la longueur du segment : $(t_{\alpha+1} - t_\alpha)\sqrt{F(\theta_\alpha)}$

on commet une erreur moindre que $\dfrac{\varepsilon'}{2\sqrt{A}}$,

et dans la somme de ces longueurs élémentaires l'erreur totale sera inférieure à : $\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{A}} \Sigma (t_{\alpha+1} - t_\alpha) = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{A}}(b-a)$

qui peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Or la somme : $\Sigma (t_{\alpha+1} - t_\alpha) \sqrt{F(t_\alpha)}$ a pour limite $\int_a^b \sqrt{F(t)}\, dt$ — Donc la longueur totale de la ligne polygonale a pour limite cette même intégrale, qui est <u>par définition</u> la longueur de l'arc de courbe (a, b).

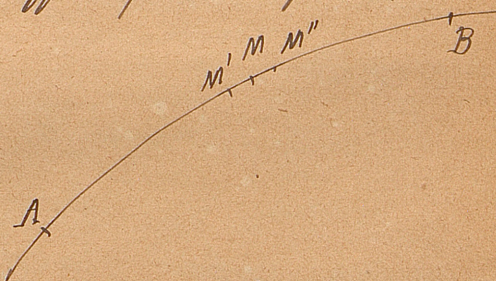
<u>Remarques</u>. On a supposé que les valeurs $t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_{n-1}$ allaient en croissant. Cela signifie géométriquement que les points correspondants se succèdent dans cet ordre sur l'arc de courbe. En effet, la direction $t_1 t_2$ diffère très peu de la direction de la tangente à la courbe en t_1 qui correspond à t croissant, et de même la direction $t_2 t_3$ diffère très peu de la direction de la tangente

en t_2 ; ces 2 directions sont donc très-voisines, et l'angle $t_1 \hat{t_2} t_3$ est très-obtus, ce qui montre que la ligne brisée $t_1 t_2 t_3$ se confond presque avec la courbe. Sans cette condition, la ligne polygonale inscrite dans l'arc de courbe pourrait rétrograder et se croiser, de sorte qu'elle n'aurait aucune limite déterminée, tandis que la notion d'arc de courbe exige qu'elle ait une limite fixe.

– La condition $F(t) > 0$ intervient dans la démonstration pour qu'on puisse poser : $F(t) > A$, et qu'on ait :

$$\sqrt{F(t)+\varepsilon'} - \sqrt{F(t)} < \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{A}}.$$

Elle n'est pas indispensable à l'existence de la limite en question pourvu que $F(t)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans l'intervalle (a, b). Soit en effet par exemple le point M correspondant à la valeur m, pour laquelle f', φ', ψ' s'annulent à la fois ; prenons de part et d'autre les points M', M'' correspondant aux valeurs très-voisines m', m''. – On aura : arc $AM' = \int_a^{m'} \sqrt{F(t)}\, dt$



arc $M''B = \int_{m''}^{b} \sqrt{F(t)}\, dt$

D'ailleurs l'intervalle $(m' m'')$ peut être pris aussi petit qu'on veut, l'erreur commise en prenant arc AM' + arc $M''B$ pour arc AB pourra être rendue plus petite que toute quantité donnée ; donc la

définition précédente subsiste, et l'on a toujours :

$$\text{arc } AB = \int_a^b \sqrt{F(t)}\, dt.$$

L'intégrale $\int_a^b \sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\, dt$

donne lieu aux remarques suivantes :

Si l'on fait le changement de variables : $t = \chi(\theta)$,

les 3 coordonnées deviennent respectivement :

$$x = f_1(\theta), \quad y = \varphi_1(\theta), \quad z = \psi_1(\theta)$$

Soient a', b' les valeurs de θ pour lesquelles $t = a$, $t = b$;

l'intégrale devient : $\int_{a'}^{b'} \sqrt{f_1'^2(\theta)+\varphi_1'^2(\theta)+\psi_1'^2(\theta)}\, d\theta$

L'identité de cette intégrale et de l'ancienne est facile à vérifier directement, car on a : $f_1'(\theta) = f'(t)\chi'(\theta)$, et $d\theta = \dfrac{dt}{\chi'(\theta)}$.

— Si au lieu de la limite supérieure b nous mettons la variable t, nous aurons l'expression de la longueur variable de l'arc de courbe compris entre le point fixe A et le point mobile T. Ce sera l'arc de courbe compté à partir du point A et exprimé en fonction de t. La dérivée de cet arc variable par rapport à t est :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

Si l'on remplace les dérivées par des quotients différentiels, qu'on élève au carré et qu'on multiplie par dt^2, on aura la

Relation : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Interprétation géométrique. Si nous considérons dt comme un infiniment petit du 1er ordre, dx, dy, dz seront les accroissements de x, y, z correspondant à dt. En négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur au 2e, $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ est égal au carré du segment de droite qui va du point t au point $(t+dt)$. Ainsi, aux infiniment petits près d'ordre supérieur au 2e, le carré de l'accroissement de l'arc est égal au carré de la corde; donc l'arc est égal à sa corde aux infiniment petits près d'ordre supérieur au 1er. Autrement dit, le rapport de l'arc à sa corde a pour limite 1 quand les extrémités se rapprochent indéfiniment.

— Cette remarque peut servir à trouver la différentielle de l'arc de courbe dans d'autres systèmes de coordonnées.

Supposons que les coordonnées soient obliques, et soient λ, μ, ν les angles que font deux à deux les axes Ox, Oy, Oz. Le carré de la corde sera:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dy\,dz\cos\lambda + 2dx\,dz\cos\mu + 2dx\,dy\cos\nu + \dots$$

en négligeant les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au 2e. On aura donc

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + \frac{2dy\,dz\cos\lambda}{dt^2} + \frac{2dx\,dz\cos\mu}{dt^2} + \frac{2dx\,dy\cos\nu}{dt^2} +$$

plus des infiniments petits qui s'annulent en même temps que dt. On a donc rigoureusement, quand $\frac{ds}{dt}$ atteint sa limite, qui est

la dérivée de s par rapport à t, la relation précédente, où $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont devenus rigoureusement égaux aux dérivées de x, y, z par rapport à t; on aura donc rigoureusement, en multipliant par dt^2:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dydz\cos\lambda + 2dxdz\cos\mu + 2dxdy\cos\nu.$$

Dans le cas d'une courbe plane rapportée à des axes obliques, on a:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2dxdy\cos\theta$$

et dans le cas des coordonnées rectangulaires:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

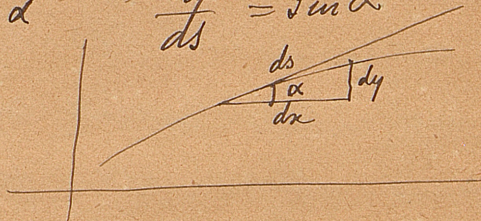
— Remarque. On peut convenir de fixer un point sur une courbe en mesurant l'arc qu'il intercepte sur cette courbe à partir d'un point fixe, l'arc étant compté positivement dans un sens et négativement dans l'autre à partir du p. fixe a. Chaque point de la courbe sera défini sans ambiguïté par l'arc qui va du p. a à ce point. Alors x, y, z, au lieu d'être fonctions de la variable t, seront des fonctions de l'arc variable s. Dans ce cas, on devra avoir: $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$ Il importe de se rendre compte de la signification géométrique de ces dérivées. — En général, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ définissent sans ambiguïté la direction de la tangente correspondant à t croissant. Les cosinus directeurs de la tangente sont alors:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

le radical étant pris avec le signe +.

De même, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ définissent la direction de la tangente correspondant aux arcs croissants, et ce sont précisément les cosinus directeurs de la tangente, puisque la somme de leurs carrés est 1.

— Dans le cas d'une courbe plane $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont respectivt le cosinus et le sinus de l'angle que la tangente au pt (x, y) fait avec l'axe des x : $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$



Ces 2 relations sont manifestes sur la figure.
On ferait la même remarque pour une courbe de l'espace.

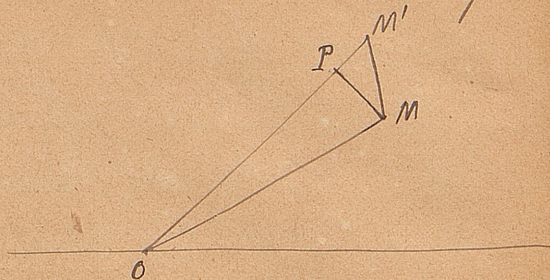
— Examinons maintenant le cas d'une courbe plane en coordonnées polaires ρ, θ. Considérons le système de coordonnées rectangulaires dont l'axe des x serait l'axe polaire et l'axe des y une perpendiculaire menée à l'axe polaire par le pôle. Le pôle devient l'origine, et les formules de transformation sont : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Prenons les différentielles :
$$dx = d\rho\cos\theta - \rho\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = d\rho\sin\theta + \rho\cos\theta\, d\theta$$

d'où : $dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2\frac{d\theta^2}{dt^2}}\; dt$$

t étant le paramètre variable en fonction duquel sont exprimés ρ et θ, et qui définit ainsi la courbe considérée.

Ces résultats peuvent être immédiatement obtenus sans calcul par la simple inspection de la figure qui les rend évidents. Soient M, M' les 2 points voisins de la courbe; l'angle MOM' est $d\theta$. Si l'on trace l'arc de cercle PM' du centre O,



on a, en négligeant les infiniment petits du 2e ordre,

$$PM' = d\rho, \quad MM' = ds \quad , \text{ et } ; \quad \text{arc } PM = \rho\, d\theta = \text{corde } PM.$$

Le triangle PMM' peut être considéré comme rectiligne et rectangle; il donne:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

L'angle de la tangente à la courbe en M ~~est~~ avec le rayon vecteur est $P\hat{M'}M$, toujours aux infiniment petits près du 2e ordre; appelons V cet angle:

$$d\rho = ds \cos V \qquad \rho\, d\theta = ds \sin V$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho}$$

Nous n'insistons pas sur le sens de la tangente et le signe de l'angle; il nous suffit d'avoir retrouvé géométriquement des formules démontrées analytiquement et discutées plus haut.

— On établirait de même les formules de l'arc de courbe dans un système de coordonnées planes quelconques.

Considérons plus généralement une courbe appartenant à la surface que définissent les 3 équations:

$$x = f(u, v) \qquad y = \varphi(u, v) \qquad z = \psi(u, v)$$

Si l'on exprime u et v en fonction d'un paramètre variable t,

on décrira une courbe sur cette surface. On a les différentielles :

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \quad dz = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, du^2 + 2F du\, dv + G\, dv^2$$

en posant, comme toujours :

$$E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 \qquad G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}$$

Si l'on suppose que u et v sont fonctions de t, du, dv deviennent : $u'dt$, $v'dt$ $\quad u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$.

On a donc : $$ds^2 = \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] dt^2$$

et $$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

La quantité soumise au radical est appelée le carré de l'élément linéaire de la courbe.

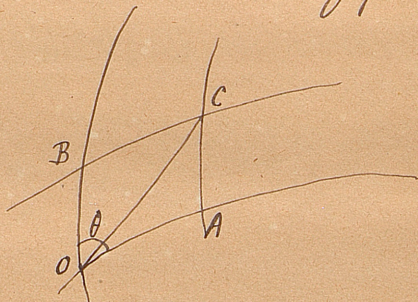
— Dans le cas où l'on fait v constante, la formule se réduit à : $ds^2 = E\, du^2$

Ainsi dans une courbe de la surface pour laquelle v est constante, la différentielle de l'arc est $du\sqrt{E}$; $\sqrt{E}$ est donc la dérivée de l'élément linéaire de la courbe par rapport à u. De même, $dv\sqrt{G}$ est la différentielle de l'arc d'une courbe pour laquelle u est

constante, et $\sqrt{G}$ est la dérivée de l'élément linéaire de la courbe par rapport à v. Ces remarques permettent d'interpréter géométriqt la formule $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

Soit le point O ayant pour coordonnées u, v ; A correspondant à $(u+du, v)$, B à $(u, v+dv)$. Par A et par B menons les 2 courbes $u+du = c^{te}$, $v+dv = c^{te}$. Elles se coupent en C, qui a donc pour coordonnées : $u+du$, $v+dv$.

L'arc AC est égal à l'arc OB, aux infiniment petits près du 2e ordre : en effet, $OB = \sqrt{G}\, dv$; pour avoir AC il faudrait remplacer dans G, u par $u+du$: ce qui n'introduirait que des infiniment petits du 2e ordre au moins. Ainsi la figure OABC peut être considérée comme un parallélogramme. Or ds est OC ; le triangle OAC, regardé comme rectiligne, donne :



$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{OA}.\overline{AC} \cos\theta$$

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 + 2\sqrt{EG}\, du dv \cos\theta \qquad \text{Or : } \cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

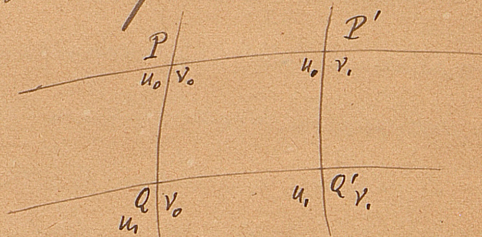
On retrouve donc la formule : $ds^2 = E du^2 + G dv^2 + 2F du dv$

Cette formule contient comme cas particulier la formule des coordonnées polaires, z étant constamment nulle :

$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \rho^2 \qquad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$

— Supposons par exemple que E ne contienne pas v ; on aura

pour les courbes où v est constante : $ds = du\sqrt{E}$
et pour la longueur de l'arc : $S = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E}\, du$
expression indépendante de v.
Marquons les points P, Q de la courbe $v_0 = c^{te}$ correspondant à u_0, u_1 : menons par P et Q les courbes pour lesquelles u est constante ; menons une seconde courbe $v_1 = c^{te}$ qui coupe les 2 précédentes en P', Q'.



Si l'intégrale qui mesure PQ est indépendante de v, cela veut dire que l'arc $P'Q'$ est égal à l'arc PQ, et cela quelle que soit la valeur de v_1.

C'est ce qui a lieu dans le cas des coordonnées polaires. Les courbes $\rho = c^{te}$ sont des cercles ayant pour centre le pôle ; les courbes $\theta = c^{te}$ sont des droites issues du pôle. Les segments de 2 droites quelconques compris entre 2 cercles concentriques sont égaux, parce que le coefficient E de $d\rho^2$ ne contient pas θ.

Considérons encore le cas des courbes planes définies par une relation entre p et α ; l'équation de leur tangente est :

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = p \qquad p \text{ étant fonction de } \alpha.$$

Un point quelconque de la courbe est déterminé par l'équation précédente jointe à la suivante : $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p'$
p' étant la dérivée de p par rapport à α. On peut exprimer x et y en fonction de p et α en les tirant des éq. précédentes :

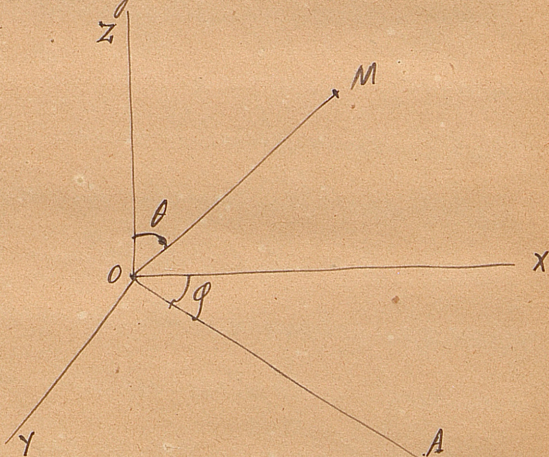
$$x = p \sin\alpha + p' \cos\alpha \qquad dx = (p+p'')\cos\alpha\, d\alpha$$

$$y = -p\cos\alpha + p'\sin\alpha \qquad dy = (p+p'')\sin\alpha\, d\alpha$$

$$ds = (p+p'')\,d\alpha .$$

Ces formules sont commodes pour rectifier certaines courbes, comme les épicycloïdes et la spirale logarithmique.

— Application au calcul de la longueur d'un arc de loxodromie:
La loxodromie est une courbe sphérique qui coupe tous les méridiens sous un angle constant (c'est l'analogue de la spirale logarithmique dans le plan.) — Nous allons d'abord montrer comment on peut fixer un point sur une sphère par sa longitude et sa colatitude.

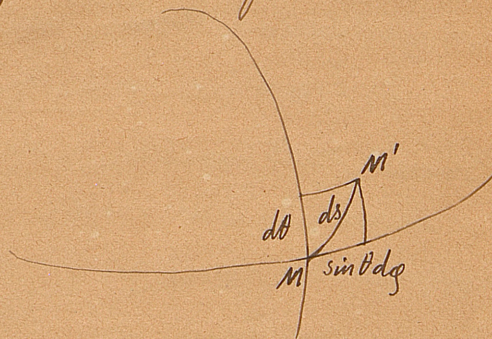


— Toute direction de l'espace peut être déterminée par 2 angles; soit le point M rapporté à 3 axes orthogonaux. Le plan ZOM coupe le plan XOY suivant OA; prenons par exemple OA pour demi-droite positive, et posons $\widehat{AOX} = \varphi$.
Posons ensuite $\widehat{MOZ} = \theta$.
Le sens positif de OA étant fixé, φ est déterminé à un multiple près de 2π. Si l'on fixe en outre le sens des angles positifs dans le plan ZOA à partir de OZ, θ sera déterminé à un multiple près de π. Mais si l'on se donne φ et θ, la direction OM sera absolument déterminée.
Dans une sphère, un point de la surface est défini sans ambiguïté par les 2 angles φ et θ, qui sont sa longitude et sa colatitude;

on aura tous les points de la sphère en faisant varier φ de 0 à 2π, et θ de 0 à π. Nous supposons, pour simplifier, le rayon égal à l'unité ; $x = \sin\theta \cos\varphi$ $\quad y = \sin\theta \sin\varphi$ $\quad z = \cos\theta$

Les courbes $\varphi = C^{te}$ sont les méridiens, et les courbes $\theta = C^{te}$ sont les parallèles, dont le rayon est $\sin\theta$. La différentielle du méridien est $d\theta$; la différentielle d'un parallèle est $\sin\theta\, d\varphi$. On a évidemment $F = 0$, car les 2 systèmes de courbes sont orthogonaux. Donc ; $\quad ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$

Nous pouvons maintenant définir analytiq^t la loxodromie — Désignons par α l'angle constant que cette courbe fait avec les méridiens. Supposons que θ et φ soient des fonctions d'un paramètre t telles qu'elles définissent la loxodromie. La tangente à la courbe s'obtiendra en prenant sur la tangente au méridien un segment θ', sur la tangente au parallèle un segment $\sin\theta\, \varphi'$, et en composant ces 2 segments.



On a ainsi ; $\quad d\theta = ds \cos\alpha$

$$\sin\theta\, d\varphi = ds \sin\alpha$$

d'où l'équation différentielle obtenue en éliminant ds :

$$d\theta^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \cos^2\alpha$$

$$d\theta^2 \sin^2\alpha = \sin^2\theta \cos^2\alpha\, d\varphi^2 \qquad d\varphi = \operatorname{tg}\alpha \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$\varphi = \operatorname{tg}\alpha \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

On fera rentrer dans φ la constante d'intégration en faisant tourner le méridien origine. On tire θ en fonction de φ :

$$\theta = 2 \operatorname{arc tg} \left(e^{\frac{2\varphi}{tg\alpha}}\right) \qquad \text{Pour } \varphi = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi la courbe part d'un point de l'équateur, dont le méridien servira d'origine pour les longitudes. Quand φ croît indéfiniment, θ tend vers π ; quand φ décroît indéfiniment dans le sens négatif θ tend vers 0. On a ainsi une infinité de spires tournant autour de chaque pôle et s'en approchant indéfiniment.

La longueur des arcs est donnée par la formule :

$$\theta = s \cos\alpha + C \qquad \text{tirée de : } \quad d\theta = ds \cos\alpha.$$

Si l'on veut que les arcs partent de l'équateur, il faudra prendre $C = \frac{\pi}{2}$, valeur de θ correspondant à $\varphi = 0$.

31e Détermination de l'aire d'une portion de surface

Soit une surface définie en coordonnées rectangulaires par les 3 éq.

$$x = f(u,v) \qquad y = \varphi(u,v) \qquad z = \psi(u,v)$$

Prenons dans un plan 2 axes rectangulaires Ou, Ov, sur lesquels nous porterons les paramètres u, v ; à chaque point du plan correspondra en général un point de la surface. Supposons que cette correspondance soit telle qu'à chaque point de la portion de plan A corresponde un point, et un seul, de la portion de surface A', et réciproquement ; et qu'à 2 points infiniment voisins dans A correspondent 2 points infiniment voisins dans A',

et réciproquement. Nous supposons en outre que les 3 déterminants fonctionnels :

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \eta = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} \quad \zeta = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}$$

ne sont pas nuls simultanément à l'intérieur de l'aire A', et que dans cette même aire les dérivées premières sont continues et les dérivées secondes finies.

Cela posé, divisons l'aire A en une multitude de petits triangles tels qu'un quelconque d'entre eux soit extérieur à tous les autres, et que leurs angles ne soient pas infiniment petits, autrement dit, que le rapport de leurs côtés reste fini. A ces petits triangles correspondent en A' d'autres petits triangles, qui forment une surface polyédrique inscrite dans la surface courbe considérée ; on va montrer que l'aire de cette surface polyédrique a une limite qui sera par définition l'aire de la surface courbe et que nous nous proposons d'évaluer.

L'aire d'un triangle quelconque, dans A', a pour valeur la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur les 3 plans coordonnés. Un quelconque d'entre eux aura pour sommets les points : (u, v) $(u+h, v+k)$ $(u+h', v+k')$

Sa projection sur le plan xOy aura pour aire la moitié du déterminant ;

$$\pm \begin{vmatrix} \varphi(u+h, v+k) - \varphi(u,v) & \varphi(u+h', v+k') - \varphi(u,v) \\ \psi(u+h, v+k) - \psi(u,v) & \psi(u+h', v+k') - \psi(u,v) \end{vmatrix}$$

On prendra celui des 2 signes qui rend le déterminant positif. Développons les différences qui en sont les ~~termes~~ facteurs par la formule

de Taylor, en négligeant les termes du 2e degré et au-dessus :

$$\begin{vmatrix} h\varphi'_u + k\varphi'_v & h\psi'_u + k\psi'_v \\ h'\varphi'_u + k'\varphi'_v & h'\psi'_u + k'\psi'_v \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un produit de 2 déterminants :

$$\begin{vmatrix} h & k \\ h' & k' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} = \xi\,(hk' - kh')$$

On a supposé que le rapport des côtés du triangle reste fini ; donc les quantités h, k, h', k' sont infiniment petites du 1er ordre comme l'un quelconque de ces côtés ; ainsi $(hk' - kh')$ sera un infiniment petit du 2e ordre seulement : on le voit autrement en remarquant que ce déterminant est égal à $pp' \sin\alpha$, qui est du 2e ordre puisque $\sin\alpha$ reste fini. Les termes négligés sont du 3e ordre et au-dessus.

Si nous évaluons de même l'aire des projections du triangle sur les autres plans, et que nous ~~fassio~~ prenions la racine de la somme des carrés de ces aires, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\sqrt{(hk'-kh')^2\left[(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + \text{termes du } 5^e \text{ ordre}\right]}$$

ou $\pm\frac{1}{2}(hk'-kh')\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} +$ infiniment petits

Les termes infiniments petits soumis au radical peuvent s'écrire ; $M\alpha$, α étant une quantité infiniment petite de l'ordre des côtés du triangle. Puisque par hypothèse les dérivées secondes restent finies dans l'aire A', la valeur absolue de M reste finie ;

et comme on a d'autre part la condition : $\xi^2+\eta^2+\zeta^2>0$

on peut écrire :

$$\pm\frac{1}{2}(hk'-kh')\left[\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}+M'\alpha\right]$$

Pour avoir l'aire totale A', on effectuera les produits analogues et on ajoutera ensemble les quantités de même ordre :

$$\pm\frac{1}{2}\sum(hk'-kh')\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}+\frac{1}{2}\sum M'\alpha(hk'-kh')$$

$\frac{1}{2}(hk'-kh')$ est l'aire du petit triangle élémentaire de A que multiplie une fonction de u, v ; la somme qui figure au 1er terme devient donc, à la limite :

$$\iint_A\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,du\,dv$$

La 2e somme s'annule à la limite, sous les conditions spécifiées plus haut. En effet, M' reste inférieur à un nombre fini et fixe M'', et les quantités α deviennent inférieures à un nombre positif ε aussi petit qu'on veut ; la 2e somme est donc inférieure à :

$$\frac{1}{2}M''\varepsilon\sum(hk'-kh')$$

Or $\sum(hk'-kh')$ a pour limite l'aire A, essentiellement finie ; donc l'ensemble tend vers 0. Ainsi l'aire polyédrique inscrite dans la surface A' a pour limite :

$$\iint_A\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,du\,dv$$

qui est par définition l'aire de la surface A'.

On a d'ailleurs, en vertu de l'identité de Lagrange

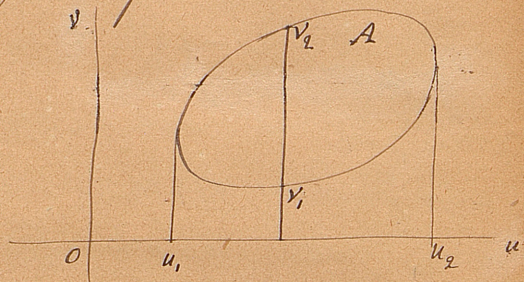
$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=EG-F^2$$

L'aire A' a donc pour expression l'intégrale double :

$$\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$ étendue à tous les points de l'aire A.

On peut considérer cette intégrale comme représentant le volume d'un cylindre parallèle à l'axe des w, ayant pour base dans le plan des (u, v) la courbe qui limite l'aire A, et terminé à la surface qui aurait pour équation : $w = \sqrt{EG - F^2}$

Pour évaluer une telle intégrale, supposons l'aire A limitée par une courbe convexe, de telle sorte qu'une parallèle à l'axe des v ne rencontre ce contour qu'en 2 points v_1, v_2. On prend d'abord l'intégrale simple :



$$\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F^2}\, dv$$

v_1, v_2 étant des fonctions de u qui définissent la courbe fermée qui limite A. Cette intégrale est une certaine fonction $F(u)$. Puis on fait l'intégration :

$$\int_{u_1}^{u_2} F(u)\, du$$

u_1, u_2 étant les abscisses qui comprennent l'aire entière A. Le résultat des 2 opérations est :

$$\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F^2}\, dv$$

L'intégrale simple $\int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG - F^2}\, dv$ représente l'aire d'une section déterminée dans le cylindre par le plan : $u = c^{te}$.

— Il est aisé de retrouver par des considérations géométriques simples les résultats précédents. Soient, sur la surface A', les courbes $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ passant par un point M. Sur la 1e prenons un point A dont les coordonnées soient : u, $v + dv$,

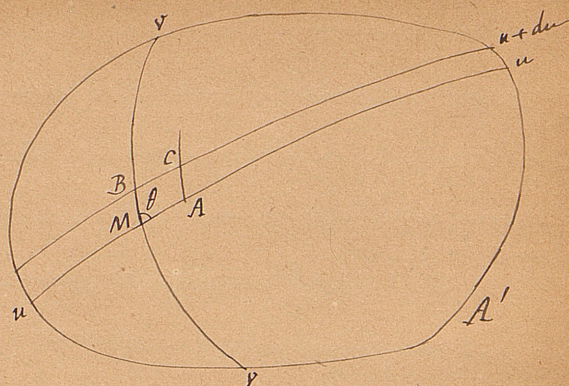
sur la 2e un p. B $(u+du, v)$ et formons le parallélogramme infiniment petit $MACB$;

On sait que : $MA = \sqrt{E}\, du$

$MB = \sqrt{G}\, dv$

L'aire de ce parallélogramme est $MA . MB \sin\theta$. Or :

$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ $\quad \sin\theta = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}}$



Donc l'aire $MACB$ a pour valeur : $MA . MB \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}} = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$

Tel est l'élément différentiel de l'aire considérée A'. On fera d'abord la somme des parallélogrammes infinitésimaux compris entre la courbe $u = c^{te}$ et la courbe $u + du = c^{te}$, c.à.d la somme des quantités $\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$ où du est constante.

L'intégrale $du \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG-F^2}\, dv$ représente l'aire de la bande comprise entre les courbes (u) et $(u+du)$.

On fera ensuite la somme des bandes analogues : $\int_{u_1}^{u_2} F(u)\, du$.

L'intégrale $\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{EG-F^2}\, dv$ est l'aire cherchée.

— Considérons quelques cas particuliers.

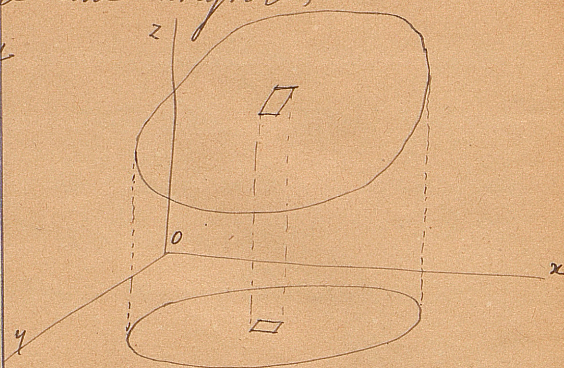
Soit une surface définie par l'équation : $z = f(x, y)$

Les paramètres u, v sont ici x, y eux-mêmes.

$dz = p\,dx + q\,dy \qquad ds^2 = dx^2(1+p^2) + 2pq\,dx\,dy + dy^2(1+q^2)$

$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 \qquad S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$

Voici la signification géométrique de cette intégrale :



$dx\,dy$ représente l'aire d'un élément rectangulaire de la projection de la surface sur le plan des (x, y).

$\sqrt{1+p^2+q^2}$ est l'inverse du cosinus de l'angle que le plan tangent en (x, y, z) fait avec le plan (x, y)

L'intégrale précédente revient donc à :

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\alpha}$$

Or $\dfrac{dx\,dy}{\cos\alpha}$ est l'aire du parallélogramme du plan tangent, qui a pour projection le rectangle $dx\,dy$; c'est l'élément d'aire de la surface considérée.

Exercice : Calculer l'aire du paraboloïde hyperbolique : $z = xy$ qui se projette sur le plan (x, y) suivant un quart de cercle de centre O et de rayon a compris entre les 2 axes ; — suivant un carré ayant pour côtés les 2 axes et de côté a.

— Supposons maintenant qu'on ait à évaluer une aire plane dans le plan des x, y, et voyons ce que signifie la formule générale dans ce cas. La fonction $z = \psi(u, v)$ est identiquement nulle. Des 3 déterminants ξ, η, ζ, il ne reste que $\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}$

L'intégrale devient :

$$\iint \pm\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right) du\,dv$$

On retrouve ainsi la formule relative au changement de variables sous le signe $\int$. C'est l'aire dans le plan des x, y exprimée en

fonction des coordonnées curvilignes u, v variant de manière à engendrer la surface considérée. On obtiendrait géométriqt. ce résultat, comme précédemment, en décomposant la surface en bandes curvilignes de largeur du, et en sommant ces bandes de u_1 à u_2.
— On retrouve, comme cas particulier de cette intégrale, l'expression d'une aire en coordonnées polaires : $\iint \rho \, d\rho \, d\omega$
Cette formule s'obtient aussi géométriquement. Soit un élément d'aire plane compris entre les cercles ρ, $(\rho + d\rho)$, et les droites polaires ω, $(\omega + d\omega)$. C'est un rectangle curviligne, qui, étant infiniment petit, peut être assimilé à un rectangle rectiligne, et qui a pour côtés $\rho d\omega$ et $d\rho$, et pour surface $\rho d\rho d\omega$.
On sommera d'abord les petits rectangles du secteur $(\omega, \omega + d\omega)$, pour lesquels $d\omega$ est constant ; on a ainsi : $d\omega \int \rho \, d\rho$.
Les limites de cette intégrale indéfinie, dont la valeur est $\frac{\rho^2}{2}$, varient suivant les cas. Si le point O est à l'extérieur de l'aire, on aura :

$$d\omega \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \, d\rho = d\omega \left(\frac{\rho_2^2}{2} - \frac{\rho_1^2}{2} \right)$$

On fera ensuite la somme de tous ces secteurs : $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} d\omega \left(\rho_2^2 - \rho_1^2 \right)$
Si le point O est à l'intérieur, on fera l'intégration :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\omega \left(\rho_2^2 + \rho_1^2 \right) \quad \text{ou} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\omega \, \rho^2$$

Si le point O est sur le contour et qu'il y ait 2 tangentes en ce point, faisant les angles ω_1, ω_2 avec l'axe polaire, on aura :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega \quad , \quad \text{ou} \quad \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega$$

si la tangente est unique

Comme 2e cas particulier, considérons une surface sphérique et prenons pour coordonnées, comme précédemment, la longitude φ et la colatitude θ. On pourrait calculer E, F, G ; mais nous trouvons directement leurs valeurs par la géométrie : d'abord :

$F = 0$ car les 2 coordonnées sont des courbes orthogonales.

Posons $u = \varphi$, $v = \theta$: $\sqrt{E}\, du = \sin\theta\, d\varphi$ $\sqrt{E} = \sin\theta$

$\sqrt{G}\, dv = d\theta$ $\sqrt{G} = 1$ Donc : $\sqrt{EG - F^2} = \sin\theta$

et l'intégrale indéfinie de la surface est : $\iint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Application : Calcul de l'aire du triangle sphérique (On ne considère que le cas du triangle rectangle) Sphère de rayon 1.

Supposons que le sommet B soit sur l'axe des z, c'à d. le pôle, et que le sommet A de l'angle droit soit dans le plan (x, z) ; les 2 autres côtés sont respectivement un méridien BC et un grand cercle passant par Oy. Il s'agit de déterminer les limites de l'intégrale de manière qu'elle représente le triangle ABC.

Faisons d'abord la somme des éléments d'aire pour lesquels $d\varphi$ est constant, c'est à dire l'aire d'un fuseau compris entre 2 méridiens infiniment voisins. On fera ensuite la somme de ces fuseaux entre BA et BC : $\int_0^B d\varphi \int_0^{\theta'} \sin\theta\, d\theta$

Pour déterminer θ', il faut savoir comment θ et φ sont liés –

Posons : $\widehat{AOB} = \gamma$ L'équation du plan AOy est :

$$\frac{z}{\cos\gamma} = \frac{x}{\sin\gamma}$$

On a d'ailleurs : $x = \sin\theta\cos\varphi$ $z = \cos\theta$

$$\frac{\cos\theta}{\cos\gamma} = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sin\gamma} \qquad tg\,\theta = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma\cos\varphi}$$

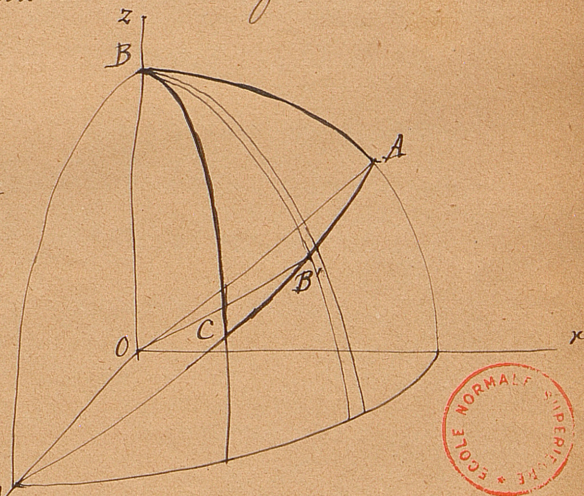
Or : $\int_0^{\theta'} \sin\theta\, d\theta = 1 - \cos\theta'$ $\qquad \cos\theta = \frac{\cos\gamma\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\varphi}}$

$$\int_0^B d\varphi\,(1-\cos\theta) = B - \cos\gamma \int_0^B \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma + \cos^2\gamma\cos^2\varphi}}$$

Dans cette dernière intégrale introduisons $tg\,\varphi$, que nous désignerons par u : $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma(1+tg^2\varphi)+\cos^2\gamma}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\gamma\, tg^2\varphi}}$

ou, puisque $d\varphi = \frac{du}{1+u^2}$, $\int \frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1+u^2\sin^2\gamma}}$

Les intégrales de cette forme se ramènent à la forme rationnelle en posant : $v^2 = \frac{u^2}{1+u^2\sin^2\gamma}$



Si l'on cherche comment v est liée à φ, on voit qu'on introduit ainsi une variable, qui est l'angle que fait un des méridiens avec le côté AC, c.à.d. : $\widehat{BB'A} = \lambda$.

On a la relation : $\cos\lambda = \cos\gamma\sin\varphi$



Transportons cette variable auxiliaire dans l'intégrale ; la différentiation donne : $-\sin\lambda\, d\lambda = \cos\gamma\cos\varphi\, d\varphi$

$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma(1-\sin^2\varphi) = 1 - \cos^2\lambda = \sin^2\lambda$. Donc :

$$\int_0^B d\varphi(1-\cos\theta) = B - \cos\gamma\int_0^B \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\lambda} = B - \cos\gamma\int_{\frac{\pi}{2}}^{C} \frac{-d\lambda}{\cos\gamma} = B + \int_{\frac{\pi}{2}}^{C} d\lambda = B + C - \frac{\pi}{2}.$$

